§ 11. Свойства функций

253.

а) $f(x)=y=5x$.

Возьмем произвольные x_1, x_2, такие что $x_1<x_2$. Тогда, умножая неравенство на 5, получаем: $f(x_1)=5x_1<5x_2=f(x_2)$

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) $f(x)=y=2x+3$.

Возьмем произвольные x_1, x_2: $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x \Leftrightarrow 2x_1+3<2x_2+3$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $f(x)=y=2x-3$.

Возьмем произвольные x_1, x_2: $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2 \Leftrightarrow 2x_1-3<2x_2-3$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

г) $f(x)=y=\frac{x}{2}+4$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{2}<\frac{x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2}+4<\frac{x_2}{2}+4$

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

254.

а) $f(x)=y=x^3$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) $f(x)=y=2x^3$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3<2x_2^3$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $f(x)=y=x^3+1$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3+1<x_2^3+1$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

г) $f(x)=y=\frac{x^3}{2}$. Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow \frac{x_1^3}{2}<\frac{x_2^3}{2}$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

255.

а) $f(x)=y=x^2$, $x\geq 0$.

Для произвольных положительных (точнее неотрицательных) x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует $x_1^2<x_2^2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) f(x)=$y=-\frac{1}{x}$, $x<0$.

Для произвольных отрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$; $-\frac{1}{x_1}>-\frac{1}{x_2}$. f(x$_1$)< f(x$_2$). Функция возрастает.

в) f(x)=$y=-\frac{1}{x}$, $x>0$.

Для произвольных положительных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$; $-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}$. f(x$_1$)< f(x$_2$). Функция возрастает.

г) f(x)=$y=3x^2$, $x\geq 0$.

Для произвольных неотрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует $x_1^2<x_2^2$; $3x_1^2<3x_2^2$. То есть f(x$_1$)< f(x$_2$). Функция возрастает.

256.

а) f(x)=–5x.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -5x_1>-5x_2$. f(x$_1$)>f(x$_2$). Функция убывает.

б) f(x)=y=5–2x.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -2x_1>-2x_2$. $5-2x_1>5-2x_2$, f(x$_1$)>f(x$_2$). Функция убывает.

в) f(x)=$y=-7x+1$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -7x_1>-7x_2$. $-7x_1+1>-7x_2+1$, f(x$_1$)>f(x$_2$). Функция убывает.

г) f(x)=$y=4-\frac{x}{3}$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -\frac{x_1}{3}>-\frac{x_2}{3} \Leftrightarrow 4-\frac{x_1}{3}>4-\frac{x_2}{3}$. f(x$_1$)>f(x$_2$). Функция убывает.

257.

а) f(x)=$y=-x^3$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3$. f(x$_1$)>f(x$_2$). Функция убывает.

б) f(x)=$y=-3x^3$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -3x_1^3>-3x_2^3$. f(x$_1$)>f(x$_2$). Функция убывает.

в) f(x)=$y=-\frac{x^3}{5}$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -\frac{x_1^3}{5}>\frac{x_2^3}{5}$. f(x$_1$)>f(x$_2$). Функция убывает.

г) f(x)=$y=-x^3+7$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3+7>-x_2^3+7$, $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

258.

а) $f(x)=y=x^2$, $x\le 0$.

Для отрицательных (точнее неположительных) x_1 и x_2, $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2$

$f(x_1) > f(x_2)$. Функция убывает.

б) $f(x)=y=-2x^2$, $x\ge 0$.

Для неотрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow$

$-2x_1^2>-2x_2^2$. $f(x_1)> f(x_2)$. Функция убывает.

в) $f(x)=y=3x^2$, $x\le 0$.

Для неположительных x_1 и x_2 из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow 3x_1^2>3x_2^2$. $f(x_1)> f(x_2)$. Функция убывает.

г) $f(x)=y=-3x^2$, $x\ge 0$.

Для неотрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow$

$-3x_1^2>-3x_2^2$. $f(x_1)> f(x_2)$.

Функция убывает.

259.

а) Не ограничена ни сверху, ни снизу.

б) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

в) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

г) Ограничена и сверху и снизу, то есть ограничена.

260.

а) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

б) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

в) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

г) Ограничена и сверху и снизу , то есть ограничена.

261.

а) Ограничена сверху, не ограничена снизу.

б) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

в) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

г) Ограничена сверху, не ограничена снизу.

262.

а) Функция возрастающая, значит наименьшее значение будет при наименьшем значении аргумента, а наибольшее – при наибольшем значении аргумента.

$y_{\min} = y(0)=3$. $y_{\max} = y(1)=5$.

б) $y_{\min} = -2$, $y_{\max} = 0$;

в) $y_{\min} = y(0) = 1$. Функция неограничена сверху.

г) Наименьшего значения нет. $y_{\max} = y(2) = 2$.

263.

$y=\sqrt{x}$

а) $x\in[0; +\infty)$, $y_{\min} = y(0) = 0$.

Наибольшего значения нет, так как функция сверху неограничена.

б) $x\in[0; 3]$. $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(3) = \sqrt{3}$;

в) $x\in[1; 4]$. $y_{\min} = y(1) = 1$, $y_{\max} = y(4) = 2$;

г) $x\in(0; 2]$. Наименьшего значения нет. $y_{\max} = \sqrt{2}$.

264.

а) $y=\sqrt{x-4}$. $y_{\min} = 0$. Сверху функция неограничена.

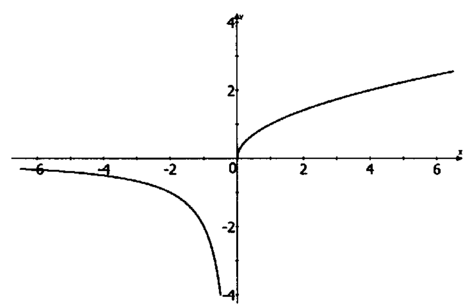
б) $y=3-\sqrt{x}$. $y_{\max} = 3$. Снизу функция неограничена.

в) $y=\sqrt{x}+2$. $y_{\min} = y(0) = 2$. Сверху функция неограничена.

г) $y=4-\sqrt{x}$. $y_{\max} = y(0) = 4$. Снизу функция неограничена.

265.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x}, \text{если } x < 0 \\ \sqrt{x}, \text{если } x \geq 0 \end{cases}.$$

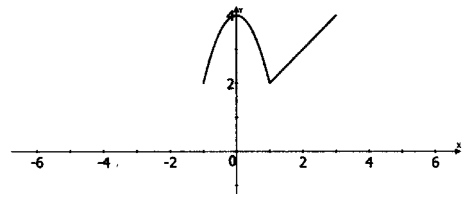


1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Убывает при x<0. Возрастает на [0; +∞).
3) Не ограничена ни снизу, ни сверху.
4) Нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.
5) Непрерывна на (–∞; 0).
Непрерывна на (0; +∞).
6) E(f) =(–∞; +∞).

7) На $(-\infty; 0)$ выпукла вверх.
На $[0; +\infty)$ выпукла вверх.

266.

$$f(x)=\begin{cases} 4-2x^2, \text{если } -1 \le x \le 1 \\ x+1, \text{если } 1 < x \le 3 \end{cases}$$



1) $D(f)=[-1; 3]$.
2) Возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; 3]$. Убывает на $[0; 1]$.
3) Ограничена.
4) Наибольшее значение $f_{\max} = 4$. Наименьшее: $f_{\min} = 2$
5) Непрерывна на $[-1; 3]$.
6) $E(f)=[2; 4]$.
7) Выпукла вверх на $[-1; 1]$.
На $[1; 3]$ функцию можно считать как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

267.
а) $y=x^3+3x$.
Возьмем произвольные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.
$x_1<x_2$; $3x_1<3x_2$, $x_1^3<x_2^3$.
Сложим эти неравенства: $x_1^3+3x_1<x_2^3+3x_2$; $f(x_1)<f(x_2)$.
Функция возрастает.
б) $y=x^4+3x$, $x\ge 0$.
Возьмем произвольные неотрицательные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.
Тогда $x_1^4<x_2^4$ и $3x_1<3x_2$.
Сложим эти неравенства.
$x_1^4+3x_1<x_2^4+3x_2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.
в) $y=2x^3+x$.
Возьмем произвольные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.
Тогда $x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3<2x_2^3$. Сложим последнее неравенство с неравенством $x_1<x_2$. $2x_1^3+x_1<2x_2^3+x_2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.
г) $y=2x^4+x$, $x \ge 0$.
Возьмем произвольные неотрицательные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.
Тогда $x_1^4<x_2^4 \Leftrightarrow 2x_1^4<2x_2^4$. Сложим последнее неравенство с неравенством $x_1<x_2$. $2x_1^4+x_1<2x_2^4+x_2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

268.

а) $y=\frac{x-5}{x+3}=\frac{x+3}{x+3}-\frac{8}{x+3}=1-\frac{8}{x+3}$, $x>-3$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(-3; +\infty)$ имеем:

$x_1<x_2$

$0<x_1+3<x_2+3$

$-\frac{8}{x_1+3}<-\frac{8}{x_2+3}\Leftrightarrow 1-\frac{8}{x_1+3}<1-\frac{8}{x_2+3}$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) $y=\frac{2-x}{1-x}=\frac{1-x}{1-x}+\frac{1}{1-x}=1-\frac{1}{1-x}$; $x<1$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(-\infty; 1)$ имеем:

$1-x_1>1-x_2>0$

$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2}$; $1-\frac{1}{1-x_1}<1-\frac{1}{1-x_2}$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$; $x>1$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(1; +\infty)$ имеем:

$0<x_1-1<x_2-1$

$\frac{2}{x_1-1}>\frac{2}{x_2-1}$; $1-\frac{2}{x_1-1}<1-\frac{2}{x_2-1}$.

$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

Задание некорректно.

г) $y=\frac{6-x}{2-x}=\frac{2-x}{2-x}+\frac{4}{2-x}$, $x<2$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(-\infty; 2)$ имеем:

$2-x_1>2-x_2>0$

$\frac{4}{2-x_1}<\frac{4}{2-x_2}$; $1+\frac{4}{2-x_1}<1+\frac{4}{2-x_2}$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

269.

а) $y=-x^3-2x$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

1. $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow -x_1^3<-x_2^3$

2. $-2x_1>-2x_2$

Складывая неравенства, получаем $-x_1^3-2x_1>-x_2^3-2x_2$;

$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

б) $y=x^6-0{,}5x$, $x\le 0$.

Для произвольных неположительных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:
$x_1^6>x_2^6$; $-0{,}5x_1>-0{,}5x_2$
Складывая эти неравенства, получаем
$x_1^6-0{,}5x_1>x_2^6-0{,}5x_2$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.
в) $y=x^4-5x$, $x\le0$.
Для произвольных неположительных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:
$x_1^4>x_2^4$;
$-5x_1>-5x_2$
Сложим эти неравенства.
$x_1^4-5x_1>x_2^4-5x_2$; $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.
г) $y=-3x^5-x$.
Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем: $-3x_1^5>-3x_2^5$; $-x_1>-x_2$
Сложим эти неравенства.
$-3x_1^5-x_1>-3x_2^5-x_2$; $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

270.

а) $y=\frac{x-5}{4-x}=-(\frac{5-x}{4-x})=-(\frac{4-x}{4-x}+\frac{1}{4-x})=-1-\frac{1}{4-x}=-1+\frac{1}{x-4}$, $x>4$.
Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ из промежутка $(4; +\infty)$ имеем:
$0<x_1-4<x_2-4$;
$\frac{1}{x_1-4}>\frac{1}{x_2-4}$; $-1+\frac{1}{x_1-4}>-1+\frac{1}{x_2-4}$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.
б) $y=\frac{2-3x}{2+x}=-(\frac{3x-2}{2+x})=-(\frac{3x+6}{x+2}+\frac{8}{x+2})=-2+\frac{8}{x+2}$, $x<-2$.
Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ из промежутка $(-\infty;-2)$ имеем:
$x_1+2<x_2+2<0$;
$\frac{8}{x_1+2}>\frac{8}{x_2+2}$; $-2+\frac{8}{x_1+2}>-2+\frac{8}{x_2+2}$.
$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.
в) $y=\frac{x+3}{1-x}=-(\frac{-3-x}{1-x})=-(\frac{1-x}{1-x}+\frac{-4}{1-x})=-1+\frac{4}{1-x}$, $x>1$.
Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ из промежутка $(1; +\infty)$ имеем:
$1-x_1>1-x_2$
$\frac{4}{1-x_1}<\frac{4}{1-x_2}$; $-1+\frac{4}{1-x_1}<-1+\frac{4}{1-x_2}$;
$f(x_1)<f(x_2)$ – функция возрастает задача некорректна.
Функция убывает.
г) $y=\frac{6-3x}{3+x}=-(\frac{3x-6}{3+x})=-(\frac{3x+9}{x+3}-\frac{15}{x+3})=-3+\frac{15}{x+3}$, $x<-3$.

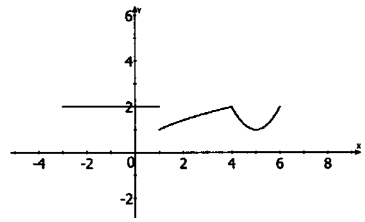
Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ из промежутка $(-\infty; -3)$ имеем:
$x_1+3<x_2+3<0$;
$\frac{15}{x_1+3}>\frac{15}{x_2+3}$; $-3+\frac{15}{x_1+3}>-3+\frac{15}{x_2+3}$.
$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

271.
а) $y=x^2+4x-3$. Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.
$x_0=-\frac{4}{2}=-2$. $y_{\min}=y_0=4-8-3=-7$. Наибольшего не существует.
б) $y=-4x^2-12x+1$.
Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.
$x_0=-\frac{-12}{-8}=-\frac{3}{2}$. $y_{\max}=y_0=-4\cdot\frac{9}{4}+12\cdot\frac{3}{2}+1=10$.
Наименьшего не существует.
в) $y=9x^2+6x-5$.
Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.
$x_0=-\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}$. $y_{\min}=y_0=9\cdot\frac{1}{9}-6\cdot\frac{1}{3}-5=-6$.
Наибольшего не существует.
г) $y=-x^2+8x-12$.
Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.
$x_0=-\frac{-8}{-2}=4$. $y_{\max}=y_0=-16+32-12=4$. $y_{\min}$ не существует.

272.
а) $y=|x|+3$, $x\in[-5; 1]$.
y будет наименьшим (наибольшим) при $|x|$ наименьшем (наибольшем)
$|x|_{наим}=0$; $|x|_{наиб}=5$; $y_{наим}=3$; $y_{наиб}=8$.
б) $y=-|4x|+1$, $x\in(-6; 2]$.
y будет наибольшим (наименьшим) при $|4x|$ наименьшем (наибольшем).
$|4x|_{наиб}$ – не существует; $|4x|_{наим}=0$
$y_{наим}$ – не существует; $y_{наиб}=1$.
в) $y=-|2x|-1$, $x\in[-1; 1]$.
y будет наибольшим при $|2x|$ наименьшем $|2x|_{наим}=0$, $y_{наим}=-3$.
г) $y=|x|+3$, $x\in[-5; 1)$.
y будет наибольшим (наименьшим) при $|x|$ наибольшем (наименьшем)
$|x|_{наиб}=5$, $y_{наиб}=8$, $|x|_{наим}=0$, $y_{наим}=3$.

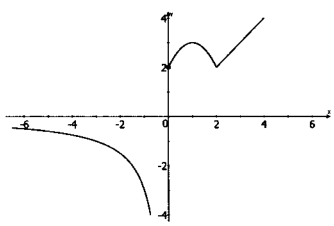
273.

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{если} -3 \le x \le 1 \\ \sqrt{x}, \text{если} \ 1 < x \le 4 \\ (x-5)^2 + 1, \text{если} \ 4 < x \le 6 \end{cases}$$



1) D(f) =[–3; 6]
2) На [–3; –1] постоянна.
На [3; 4] и на [5; 6] возрастает.
На [4; 5] убывает.
3) Ограничена.
4) $y_{наиб}$=2, $y_{наим}$=1.
5) Непрерывна на [–3; 1).
Непрерывна на (1; 6].
6) E(f)=[1; 2].
7) На [1; 4] выпукла вверх. На [4; 6] выпукла вниз.
На [–3; 1] можно считать выпуклой как вверх так и вниз.

274.



$$f(x)= \begin{cases} \frac{3}{x}, \text{если} \ x < 0 \\ -x^2 + 2x + 2, \text{если} \ 0 \le x \le 2 \\ x, \text{если} \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

1) D(f) =[–∞; 4]
2) На [–∞; 0] и на [1; 2] убывает.
На [0; 1] и на [2; 4] возрастает.
3) Ограничена сверху, неограничена снизу.
4) $y_{наиб}$=4; $y_{наим}$ – не существует.
5) Непрерывна на (–∞; 0). Непрерывна на (0; 4].
6) E(f)=(–∞; 0)∪[2; 4].
7) На [–∞; 0] и на [0; 2] выпукла вверх.
На [2; 4] выпукла как вверх, так и вниз.

§ 12. Четные и нечетные функции

275.
а) Да, симметрично.
б) Да, симметрично.
в) Нет, не симметрично.
г) Нет, не симметрично.

276.
а) Нет, не симметрично.
б) Нет, не симметрично.

в) Нет, не симметрично. г) Нет, не симметрично.

277.

а) $f(x)=3x^2+x^4$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=3(-x)^2+(-x)^4=3x^2+x^4=f(x)$. Функция четная.
б) $f(x)=4x^6-x^2$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=4(-x)^6-(-x)^2=4x^6-x^2=f(x)$. Функция четная.
в) $f(x)=2x^8-x^6$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=2(-x)^8-(-x)^6=2x^8-x^6=f(x)$. Функция четная.
г) $f(x)=5x^2+x^{10}$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=5(-x)^2+(-x)^{10}=5x^2+x^{10}=f(x)$. Функция четная.

278.

а) $f(x)=x^2(2x^2-x^3)$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x)^2(2(-x)^2-(-x)^3)=x^2(2x^2+x^3)$.
В точке $x=1$ $f(x)=1(2-1)=1$; $f(-x)=1(2+1)=3$; $f(x)\neq f(-x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.
Функция ни четная, ни нечетная. Задание не корректно.

б) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{2x^3}$; $D(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^4+1}{2(-x)^3}=-\dfrac{x^4+1}{2x^3}=-f(x)$. Функция нечетная.

в) $f(x)=x(5-x^2)$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=-x(5-(-x)^2)=-x(5-x^2)=-f(x)$. Функция нечетная.

г) $f(x)=\dfrac{3x}{x^6+2}$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=\dfrac{3(-x)}{(-x)^6+2}=-\dfrac{3}{x^6+2}=-f(x)$. Функция нечетная.

279.

$f(x)=x^2+x$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x^2)-x=x^2-x$, при $x=1$: $f(1)=2,\ f(-1)=0$
$f(-x)\neq f(x)$? $f(-x)\neq - f(x)$. Функция ни четная, ни нечетная.

280.

а) $f(x)=y=x^2$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. Функция четная.
б) $f(x)=y=x^7$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x)^7=-x^7=f(x)$. Функция нечетная.
в) $f(x)=y=x^6$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x)^6=x^6=f(x)$. Функция четная.
г) $f(x)=y=x^3$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=f(x)$. Функция нечетная.

281.

а) $f(x)=y=|x|$, $x\in[-1; 1]$; $D(f)=[-1; 1]$ – симметрично.

$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$. Функция четная.

б) $f(x)=y=x^5$, $x\in[-3; 3)$; $D(f)=[-3; 3)$ – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

в) $f(x)=y=|x|$, $x\in[-2; 2)$; $D(f)=(-2; 2)$ – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

г) $f(x)=x^5$, $x\in[-4; 4]$; $D(f)=[-4; 4]$ – симметрично.

$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$. Функция нечетная.

282.

а) $f(x)=y=2x^3$, $x\in[-2; 2]$; $D(f)=[-2; 2]$ – симметрично.

$f(-x)=2(-x)^3=-2x^3=-f(x)$. Функция нечетная.

б) $f(x)=y=-x^2$, $x\in[-1; 0]$; $D(f)=[-1; 0]$ – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

в) $f(x)=-x^2$, $x\in(-\infty; +\infty)$; $D(f)=(-\infty; \infty)$ – симметрично.

$f(-x)=-(-x)^2=-x^2=-f(x)$. Функция четная.

г) $f(x)=y=2x^3$, $x\in[-3; 3)$; $D(f)=[-3; 3)$ – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

283.

а) Четная. б) Нечетная.

в) Нечетная. г) Четная.

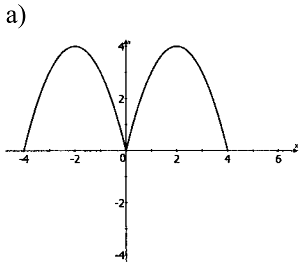
284.

а) Нечетная. б) Ни четная, ни нечетная.

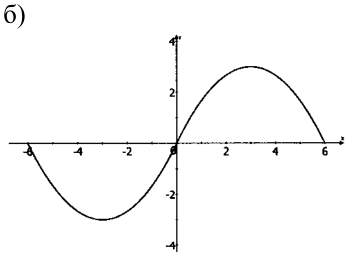
в) Четная. г) Ни четная, ни нечетная.

285.

а)

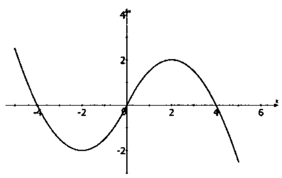


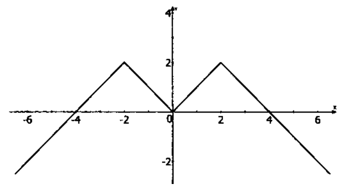
б)



в)

г)





286.

а) График f(x) симметричен относительно оси ординат. Значит направления монотонности при $x>0$ и $x<0$ противоположны.
То есть при $x<0$ функция убывает.
б) Из тех же соображений, что и в п. а) функция возрастает при $x<0$.
в) Возьмем произвольные x_1 и x_2, $x_1<x_2<0$, и рассмотрим $f(x_1)$ и $f(x_2)$
$f(x_1)=-f(-x_1)$; $f(x_2)=-f(-x_2)$.
Но $0<-x_2<-x_1$, а функция возрастает при $x>0$.
Значит, $f(-x_1)>f(-x_2) \Leftrightarrow -f(-x_1)<-f(-x_2) \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
Функция возрастает при $x<0$.
г) Возьмем произвольные x_1 и x_2, $x_1<x_2<0$.
Так как функция нечетная, то $f(-x_1)=-f(x_1)$; $f(-x_2)=-f(x_2)$.
Так как $0<-x_2<-x_1$, и функция убывает при $x>0$, то $f(-x_1)>f(-x_2)$;
$-f(x_1)<-f(-x_2)$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает при $x<0$.

287.

а) Можно. б) Нельзя.

288.

а) Можно. б) Нельзя. Ответ в задачнике неверен.

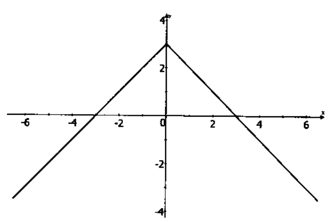
289.

а) Нельзя. Ответ в задачнике неверен. б) Можно.

290.

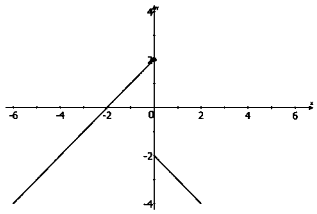
а) Нельзя. б) Можно.

291.



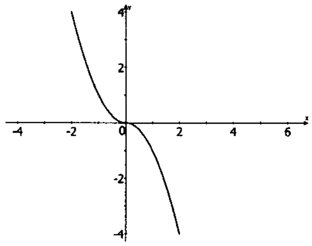
Четная.

292.



Ни четная, ни нечетная.

293.



Нечетная.

294.

а) f(x)=y=$\sqrt{x+1}$; D(f)=[–1; +∞) – не симметрично.
Ни четная, ни нечетная.

б) f(x)=y=$\frac{x-2}{x^2-1}$; D(f)=[–∞; –1)∪(–1; 1)∪(1; +∞) – симметрично.

f(–x)=$\frac{-x-2}{(-x)^2-1}=\frac{-x-2}{x^2-1}$.

При x=2, f(–x)=–4, f(x)=0. f(–x)≠ f(x), f(–x)≠ –f(x).
Ни четная, ни нечетная.

в) f(x)=y=$\sqrt{x-5}$; D(f)=[5; +∞) – не симметрично.
Ни четная, ни нечетная.

г) f(x)=y=$\frac{x+2}{x^2-16}$; D(f)=[–∞; –4)∪(–4; 4)∪(4; +∞) – симметрично.

Возьмем x=2. f(2)=$\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$.

f(–2)=0, f(2)≠ f(–2), f(–2)≠– f(2). Функция ни четная, ни нечетная.

295.

а) f(x)=4x–2x^3+6x^5. D(f)=(–∞; +∞) – симметрично.
f(–x)=4(–x)–2(–x)^3+6(–x)^5=–(4x–2x^3+6x^5)= –f(x). Функция нечетная.

б) f(x)=y=$\frac{x-2}{x^2+4}$; D(f)=(–∞; +∞) – симметрично.

Возьмем x=2. f(2)=0; f(–2)=–$\frac{4}{8}$=–$\frac{1}{2}$.

f(–2)≠f(2), f(–2)≠– f(2). Функция ни четная, ни нечетная.

в) f(x)=$\sqrt{x}$; D(f)=[0; +∞) – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

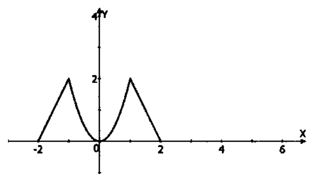
г) f(x)=y=$\frac{x^2+8}{x^2-9}$; D(f)=(–∞; –3)∪(–3; 3)∪(3; +∞) – симметрично.

f(–x)=$\frac{(-x)^2+8}{(-x)^2-9}=\frac{x^2+8}{x^2-9}$=f(x). Функция четная.

296.

f(x)=$4x^4-x^3+2x^2-x+5$. f(x)= $f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=4x^4+2x^2+5$ – четная, $f_2(x)=-x^3-x$ – нечетная.

297.



f(x)=$\begin{cases} 2x+4, \text{если } -2 \le x \le -1 \\ 2x^2, \text{если } -1 < x \le 1 \\ -2x+4, \text{если } 1 < x \le 2 \end{cases}$

1) D(f)=[–2; 2].

2) Четная.

3) Возрастает на [–2; –1] и на [0; 1].

Убывает на [–1; 0] и на [1; 2].

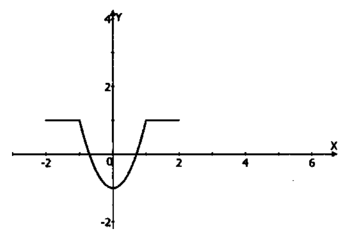
4) Ограничена. 5) $y_{\text{наим}}$=0; $y_{\text{наиб}}$=2.

6) Непрерывна. 7) E(f)=[0; 2].

8) На [–1; 1] выпукла вниз. На [–2; 1] и на [1; 2] функцию можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

298.

f(x)$\begin{cases} 1, \text{если } -2 \le x \le -1 \\ 2x^2-1, \text{если } -1 < x \le 1 \\ 1, \text{если } 1 < x \le 2 \end{cases}$



1) D(f)=[–2; 2].

2) Четная.

3) Возрастает на [0; 1]. Убывает на [–1; 0].

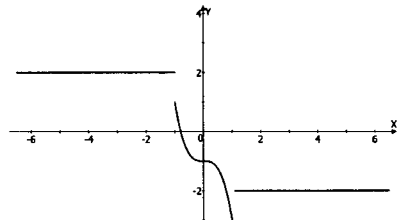
Постоянна на [–2, –1] и на [1; 2]

4) Ограничена.

5) $y_{наим}=-1$; $y_{наиб}=1$.
6) Непрерывна.
7) E(f)=[–1; 1].
8) На [–1; 1] выпукла вниз. На [–2; –1] и на [1; 2] функцию можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

299.

$$f(x)=\begin{cases}2, \text{если } x \le -1\\ -2x^3-1, \text{если } -1 < x \le 1\\ -2, \text{если } x > 1\end{cases}$$



1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Убывает на [–1; 1].
На (–∞; –1] и на (1; +∞) функция постоянна.
4) Ограничена.
5) $y_{наим}=-3$; $y_{наиб}=2$.
6) Непрерывна на (–∞; –1), на (–1; 1) и на (1; +∞).
7) E(f)=[–3; 1]∪{2}.
8) На (–1; 0) выпукла вниз. На (–∞; –1] и на [1; +∞) функцию можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

300.
а) Четная.
$h(-x)=f(-x)\ g^2(-x)=f(x)\ (-g(x))^2=f(x)\ g^2(x)=h(x)$;
б) $h(-x)=f(-x)-g(-x)=f(x)-g(x)=h(x)$, четная;
в) $h(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-h(x)$, нечетная;
г) $h(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot(-g(x))=f(x)g(x)=h(x)$, четная.

301.
$h(x)=3+x^2$.

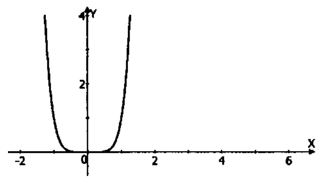
302.
$h(x)=-4-3x^2$. Ответ в задачнике неверен.

303.
а) $h(x)=3-2x^2$. б) $h(x)=-3+2x^2$.

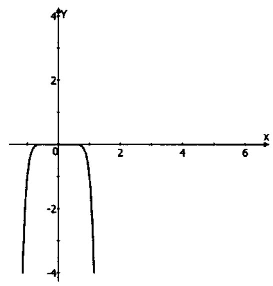
304.
а) $h(x)=1+x^2$;
б) не существует, т.к. f(0) должно быть равным 0 (в данном случае).

§ 13. Функции $y = x^n$ ($n \in N$), их свойства и графики

305.

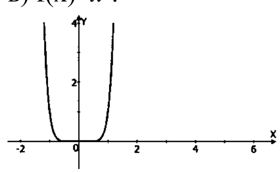


а) $f(x)=y=x^6$.
1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Четная.
3) Возрастает на $(0; +\infty)$.
Убывает на $(-\infty; 0)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует. 6) Функция непрерывна.
7) $E(f)=[0; +\infty)$. 8) Выпукла вниз.



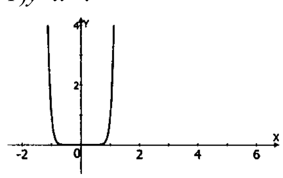
б) $f(x)=-x^{10}$.
1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Четная.
3) Возрастает на $(-\infty; 0)$.
Убывает на $(0; +\infty)$.
4) Ограничена сверху, не ограничена снизу.
5) $y_{наиб}=0$, $y_{наим}$ – не существует.
6) Функция непрерывна.
7) $E(f)=(-\infty; 0]$. 8) Выпукла вверх.

в) $f(x)=x^8$.



Свойства в точности такие же, что и в пункте а).

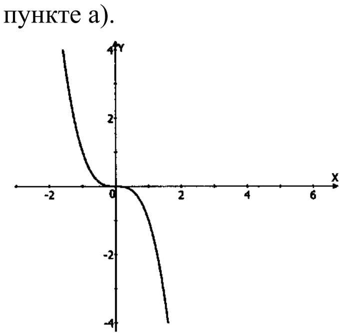
г) $y=x^{12}$.



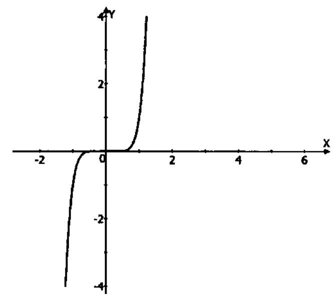
Свойства в точности такие же, что и в пункте а).

306.

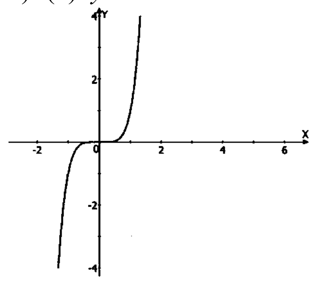
а) $f(x)=y=-x^3$
1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Нечетная.



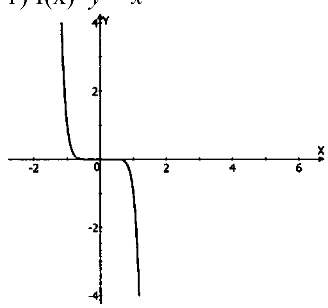
3) Убывает.
4) Не ограничена ни сверху, ни снизу.
5) $y_{наиб}$, $y_{наим}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=(–∞; +∞).
8) Выпукла вниз на (–∞; 0].
Выпукла вверх на [0; +∞).
б) f(x)=y=x^7
1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Нечетная.
3) Возрастает.
4) Не ограничена ни сверху, ни снизу.
5) $y_{наиб}$, $y_{наим}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=(–∞; +∞).
8) Выпукла вниз на (–∞; 0].
Выпукла вверх на [0; +∞).



в) f(x)=$y=x^5$



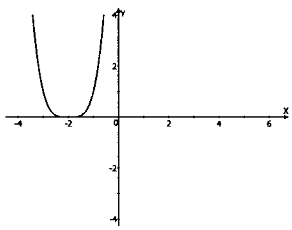
Свойства в точности те же. что и в предыдущем пункте.
г) f(x)=$y=-x^9$



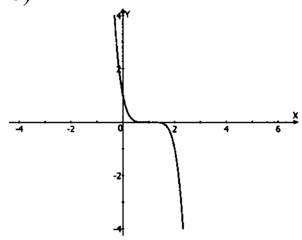
Свойства в точности те же. что и в пункте а.

307.

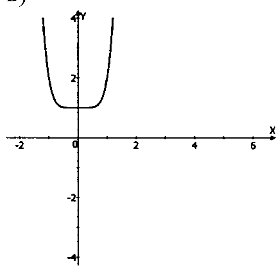
а)



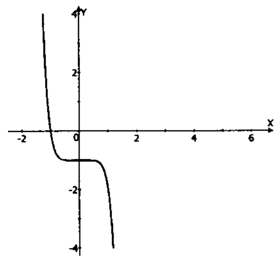
б)



в)

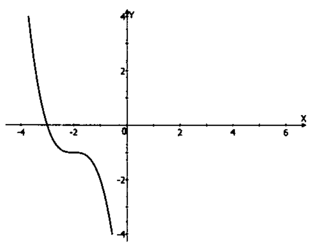


г)

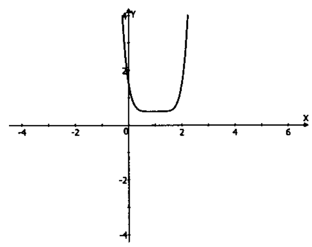


308.

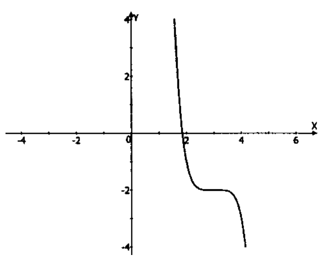
а)



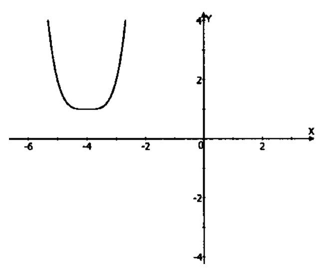
б)



в)



г)



309.

а) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}=1$; б) $y_{наим}=\frac{1}{64}$, $y_{наиб}$ – не существует;

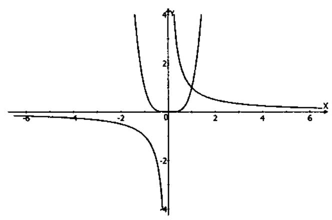
в) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}=64$; г) $y_{наим}=729$, $y_{наиб}$ – не существует.

310.

а) $y_{наим}=-1$, $y_{наиб}=1$; б) $y_{наиб}=0$, $y_{наим}$ – не существует;
в) $y_{наим}$ – не существует, $y_{наиб}=243$; г) $y_{наим}=-1$, $y_{наиб}$ – не существует.

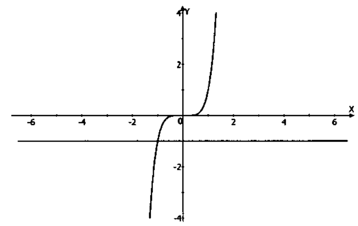
311.

а)



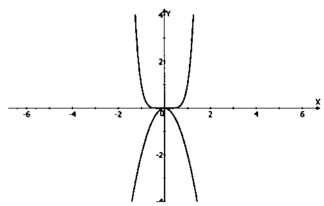
Точка пересечения (1; 1);

б)



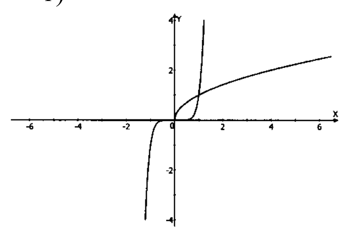
Точка пересечения (−1; −1);

в)



Точка пересечения (0; 0).

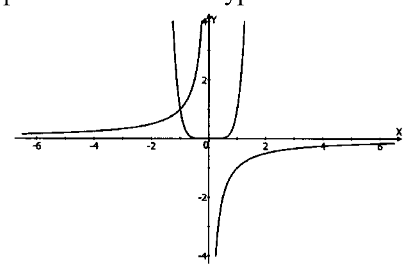
г)



Точка пересечения (0; 0) и (1; 1).

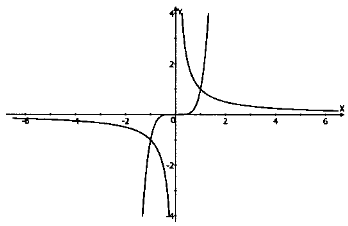
312.

а) Построим графики обеих частей уравнения.



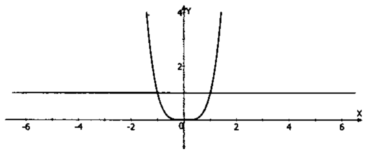
Точка пересечения (−1; 1). $x=-1$;

б)



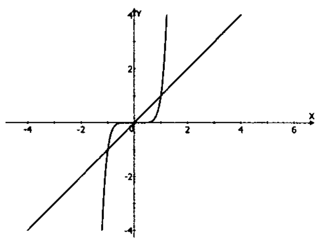
Точки пересечения (1; 1) и (–1; –1), x=1, x=–1;

в)



Точки пересечения (1; 1), (–1; –1), x=1, x=–1;

г)

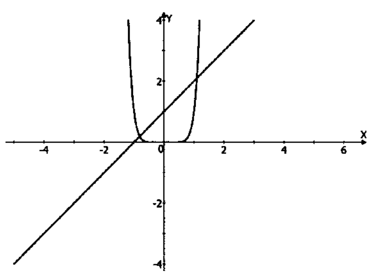


x=1, x=–1, x=0.

313.

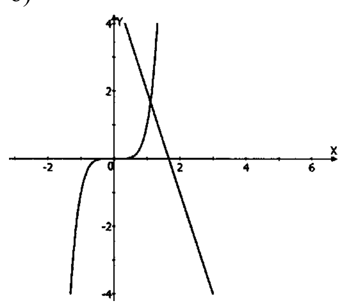
Будем определять количество решений по графикам.

а)



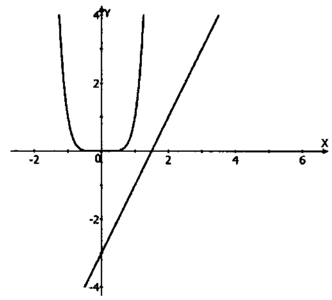
2 решения.

б)



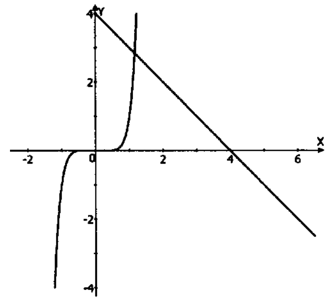
1 решение.

в)



Нет решений.

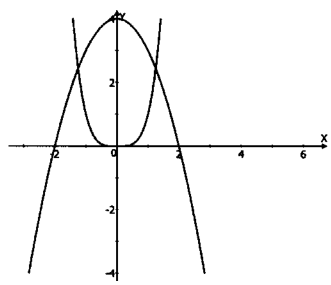
г)



1 решение.

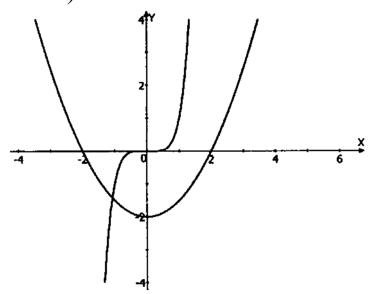
314.

а)



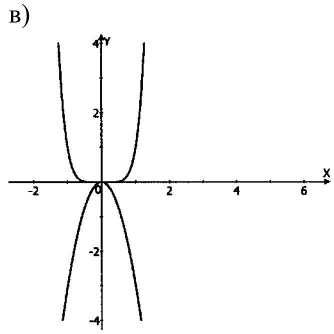
2 решения.

б)



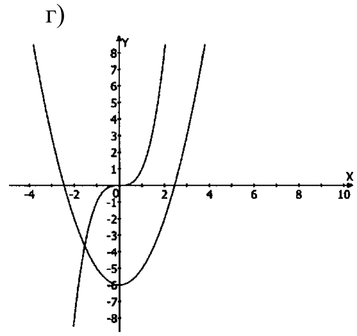
1 решение.

в)



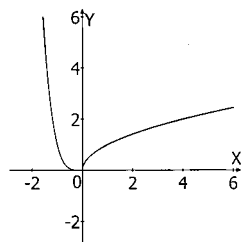
1 решение.

г)



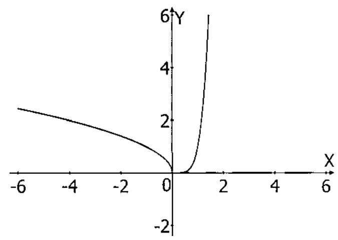
1 решение.

315.



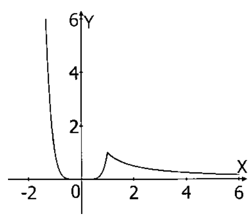
а) f(x)=$\begin{cases} x^4, \text{если } x < 0 \\ \sqrt{x}, \text{если } x \geq 0 \end{cases}$

1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Убывает на (–∞; 0].
Возрастает на [0; +∞).
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла: вниз на (–∞; 0], вверх на [0; +∞).



б) f(x)=$\begin{cases} -\sqrt{x}, \text{если } x < 0 \\ x^5, \text{если } x \geq 0 \end{cases}$

1) D(f)=[0; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает.
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на области определения.
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла вниз.



в) f(x)=$\begin{cases} x^6, \text{если } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{если } x > 1 \end{cases}$

1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [0; 1].
Убывает на [–∞; 0] и на [1; +∞).
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла вниз на (–∞; 1] и на [0; +∞).

г) f(x)=$\begin{cases} x^7, \text{если } x \leq -1 \\ -2 - x, \text{если } -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

1) D(f)=(–∞; 2].

2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $(-\infty; -1]$. Убывает на $[-1; 2]$.
4) Не ограничена снизу, ограничена сверху.
5) $y_{наиб}=-1$,
6) Непрерывна на области определения.
7) $E(f)=(-\infty; -1]$.
8) Выпукла вверх на $(-\infty; -1]$. На $[-1; 2]$ можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

316.

Если точка принадлежит графику, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y=x^2$.

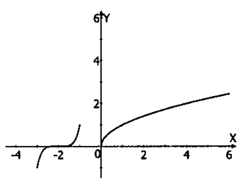
а) $256=2^n$, $n=8$; б) $-128=-2^n$, $n=7$;
в) $243=3^n$, $n=5$; г) $256=-4^n$, $n=4$.

317.

Если график проходит через заданную точку, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y=x^n$.

а) $1=(-1)^n$, n – четное. Функция четная.
б) $-1=(-1)^n$, n – нечетное. Функция нечетная.
в) $1=1^n$, n –любое. Функция либо четная, либо нечетная.
г) $-1=1^n$, чего быть не может. Задание некорректно.

318.



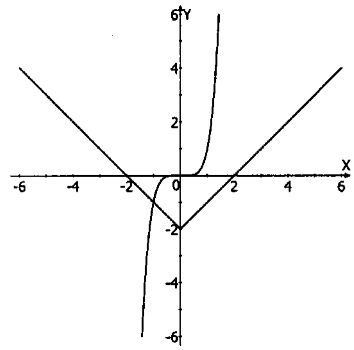
$p>Q$.

319.

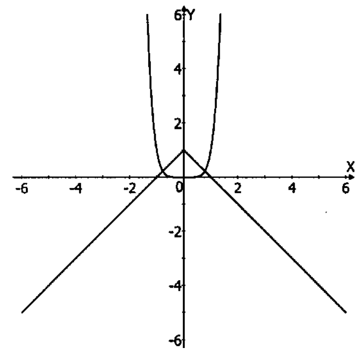
$k=L$.

320.

а) б)

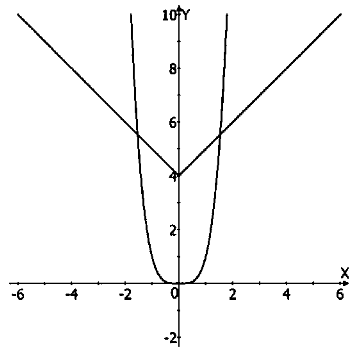


1 решение.



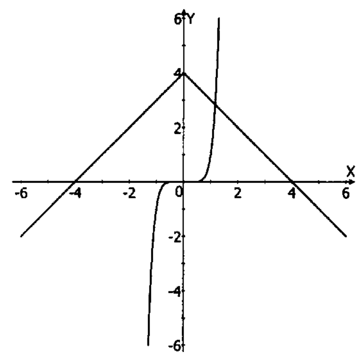
2 решения.

в)



2 решения.

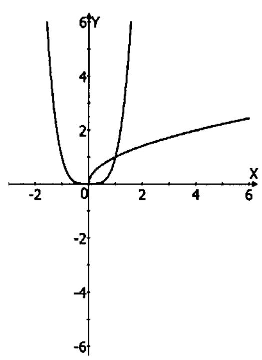
г)



1 решение.

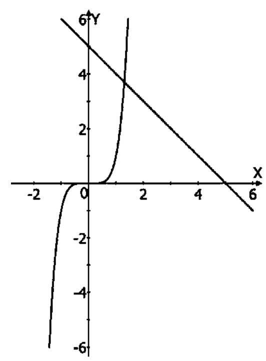
321.

а) $x^4 \leq \sqrt{x}$



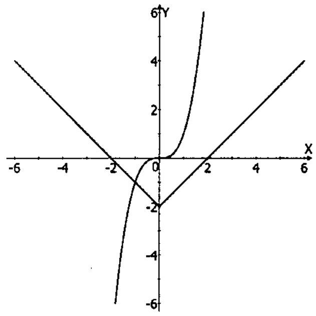
$0 \leq x \leq 1$;

б) $x^5 < 5 - x$.



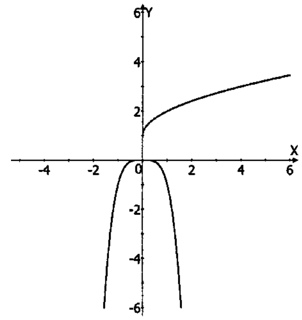
$x < 1$;

в) $x^3 \geq |x| - 2$.



$x \geq -1$.

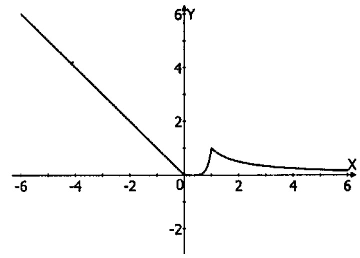
г) $-x^4 < \sqrt{x} + 1$.



$x \geq 0$.

322.

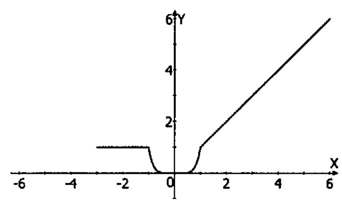
$$f(x)=\begin{cases} |x|, \text{если } x \leq 0 \\ x^7, \text{если } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{если } x > 1 \end{cases}$$



1) D(f)=$(-\infty; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [0; 1].
Убывает на $(-\infty; 0]$ и на $[1; +\infty)$.
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=$[0; +\infty)$.
8) Выпукла вниз на [0; 1] и на $[1; +\infty)$. На $(-\infty; 0]$ выпукла как вверх, так и вниз.

323.

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{если } -3 \leq x \leq -1 \\ x^6, \text{если } -1 < x \leq 1 \\ x, \text{если } x > 1 \end{cases}$$

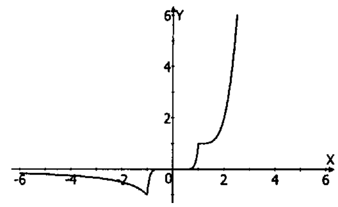


1) D(f)=$[-3; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $[0; +\infty)$. Убывает на [–1; 0]. Постоянна на [–3; –1]
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует.
6) Непрерывна на области определения.
7) E(f)=$[0; +\infty)$.

8) Выпукла вниз на $[-1; 1]$. На $[-3; -1]$ и на $[1; +\infty)$ можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

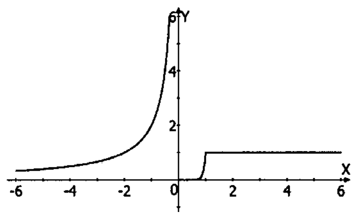
324.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x < -1 \\ x^{11}, \text{ если } -1 \le x \le 1 \\ (x-1)^4+1, \text{ если } 1 < x \le 3 \end{cases}$$



1) D(f)=$(-\infty; 3]$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $[-1; +\infty)$. Убывает на $(-\infty; -1]$.
4) Ограничена снизу, ограничена сверху.
5) $y_{\text{наим}}=-1$, $y_{\text{наиб}}=17$. 6) Непрерывна на области определения.
7) E(f)=$[-1; 17]$.
8) Выпукла вниз на $[0;1]$ и на $[1;3)$. Выпукла вверх на $[-\infty;-1]$ и на $[-1;0]$.

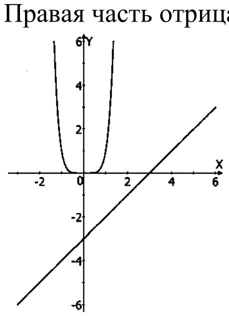
325.



$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x}, \text{ если } x < 0 \\ x^{12}, \text{ если } 0 \le x \le 1 \\ 1, \text{ если } x > 1 \end{cases}$$

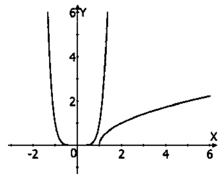
1) D(f)=$(-\infty; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $[0; 1]$. На $[1; +\infty)$ постоянна.
4) Ограничена снизу, неограничена сверху.
5) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
6) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует.
7) E(f)=$[0; +\infty)$.
8) Выпукла вниз на $(-\infty; 0]$ и на $[0; 1]$.
На $[1; +\infty)$ можно считать функцию как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

326.
а) $x^4+x^2+1=0$; $x^4=-x^2-1$.
Правая часть отрицательна, левая – неотрицательна. Корней нет.



б) $x^6-x+3=0$; $x^6=x-3$.
Точек пересечения нет. Корней нет.
в) $x^4+x^2-2x+3=0$
$x^4+1+(x-1)^2=0$

$x^4+1=-(x-1)^2$.
Правая часть не положительна, левая – положительна.
Корней нет.



г) $x^6-\sqrt{x-1}=0$

$x^6=\sqrt{x-1}$.

Точек пересечения нет. Корней нет.

327.

$y=f(x)$, $f(x)=x^7$; $f(2x)\cdot f(\frac{x}{2})=(2x)^7\cdot(\frac{x}{2})^7=x^{14}=(x^7)^2=(f(x))^2$.

328.

$y=f(x)$, $f(x)=-x^4$; $f(4x)\cdot f(-\frac{x}{4})=-(4x)^4\cdot -(\frac{-x}{4})^4=x^8=(x^4)^2=(f(x))^2$.

329.

$y=f(x)$, $f(x)=x^{10}$; $f(x^2)\cdot f(x^{-1})=(x^2)^{10}\cdot(x^{-1})^{10}=x^{20}\cdot x^{-10}=x^{10}=f(x)$.

330.

$y=f(x)$, $f(x)=-x^3$;

$(f(x))^9$: $f(-\frac{1}{2}x^4)=(-x^3)^9 : -(-\frac{1}{2}x^4)^3=-x^{27} : \frac{x^{12}}{8}=-8x^{15}=-(2x^5)^3=f(2x^5)$.

§ 14. Функции $y = x^{-n}$, ($n \in N$), их свойства и графики

331.

а) $f(x)=x^{-4}$, $A(\frac{1}{2}; 16)$, $B(-2; \frac{1}{8})$

$16=(\frac{1}{2})^{-4}$ – верно. А принадлежит графику.

$\frac{1}{8}=(-2)^{-4}$ – неверно. В не принадлежит графику.

б) $f(x)=x^{-5}$. A (0; 0), B (–1; –1)

$0=0^{-5}$ – неверно. А не принадлежит графику.

$-1=-1^{-5}$ – верно. Принадлежит графику.

в) $f(x)=x^{-6}$, A $(\sqrt{2}; \frac{1}{8})$, B $(\frac{1}{2}; 64)$

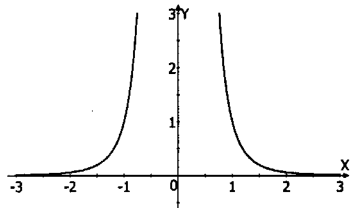
$\frac{1}{8}=(\sqrt{2})^{-6}$ – верно. А принадлежит графику.

$64=(\frac{1}{2})^{-6}$ – верно. В принадлежит графику.

г) $f(x)=x^{-7}$. $A(-1; 1)$, $B(1; -1)$; $1=-1^{-7}$ – неверно; $-1=1^{-7}$ – неверно. Ни А, ни В не принадлежат графику.

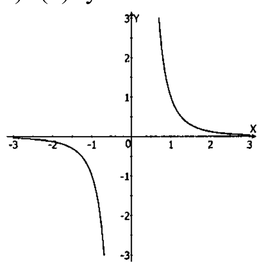
332.

а) $f(x)=y=\frac{1}{x^4}$.

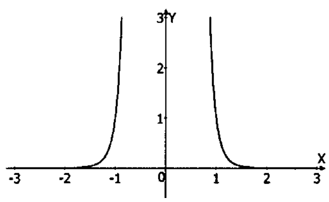


1) $D(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
2) Четная.
3) Возрастает на $(-\infty; 0)$.
Убывает на $(0; +\infty)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
7) $E(f)=(0; +\infty)$.
8) Выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

б) $f(x)=y=x^{-3}$.

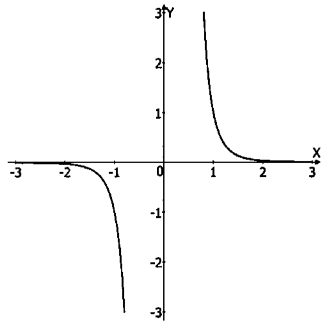


1) $D(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
2) Нечетная.
3) Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
4) Не ограничена ни снизу, ни сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
7) $E(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
8) Выпукла вверх на $(-\infty; 0)$, вниз на $(0; +\infty)$.



в) $f(x)=y=x^{-8}$.
1) $D(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
2) Четная.
3) Возрастает на $(-\infty; 0)$.
Убывает на $(0; +\infty)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
7) $E(f)=(0; +\infty)$.

8) Выпукла вниз на (–∞; 0) и на (0; +∞).

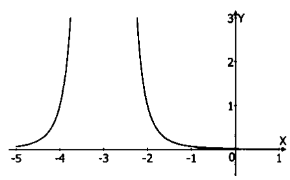


г) $f(x)=y=\frac{1}{x^5}$.

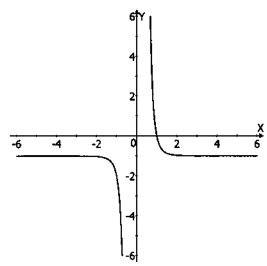
1) $D(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
2) Нечетная.
3) Убывает на (–∞; 0) и на (0; +∞).
4) Не ограничена ни снизу, ни сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на (–∞; 0) и на (0; +∞).
7) $E(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
8) Выпукла: вверх на (–∞; 0), вниз на (0; +∞).

333.

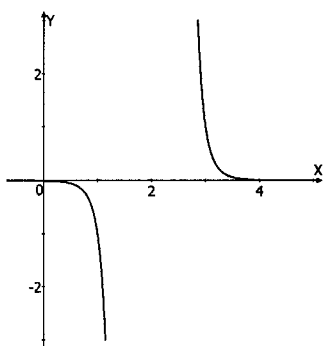
а)



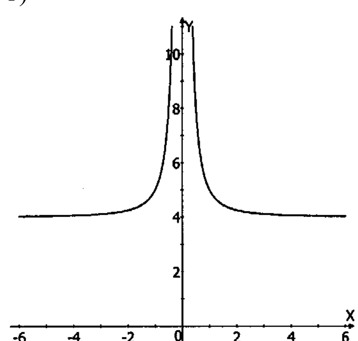
б)



в)



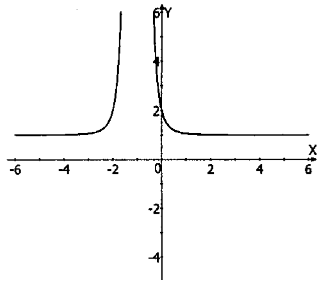
г)

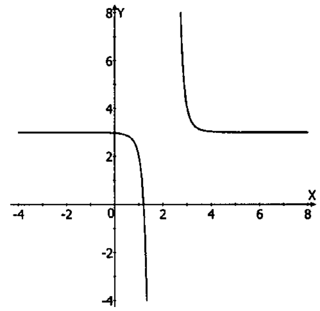


334.

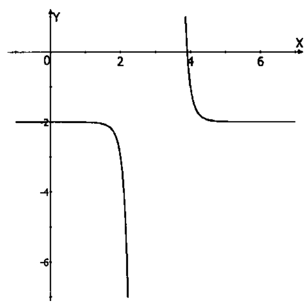
а)

б)

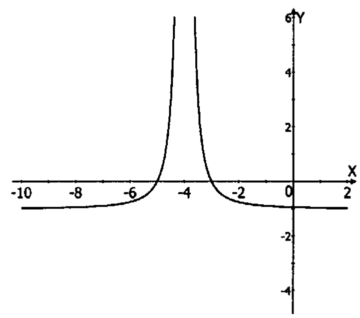




в)



г)



335.

$f(x)=y=x^{-4}$.

а) $y_{наиб}=f(\frac{1}{2})=16$ на $[-\frac{1}{2};\ 1]$, $y_{наим}=1$;

б) на $(-\infty;\ -2]$ $y_{наиб}=\frac{1}{16}$, $y_{наим}$ – не существует;

в) на $(-3;\ -1]$ $y_{наиб}=1$, $y_{наим}$ – не существует;

г) на $[3;\ +\infty)$ $y_{наиб}=f(3)=\frac{1}{81}$, $y_{наим}$ – не существует.

336.

$f(x)=y=x^{-5}$

а) на $[-2;\ -1]$ $y_{наиб}=f(-2)=-\frac{1}{32}$, $y_{наим}=f(-1)=-1$;

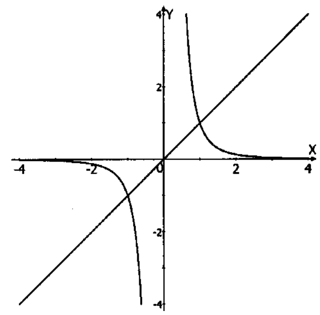
б) на $(-\infty;\ -\frac{1}{2}]$ $y_{наиб}$– не существует, $y_{наим}=f(-\frac{1}{2})=-32$;

в) на $(\frac{1}{2};\ 4]$ $y_{наиб}$ –не существует, $y_{наим}=f(4)=\frac{1}{1024}$;

г) на [2; +∞) $y_{наиб}=f(2)=\frac{1}{32}$, $y_{наим}$ – не существует.

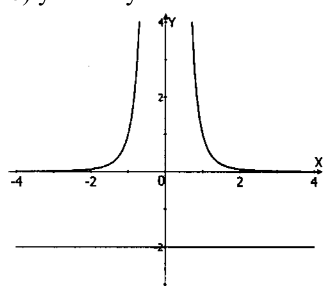
337.

а) y=x и $y=\frac{1}{x^3}$



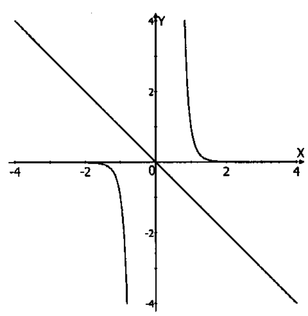
Точки пересечения (1; 1) и (–1; –1);

б) $y=x^{-4}$ и y=–2



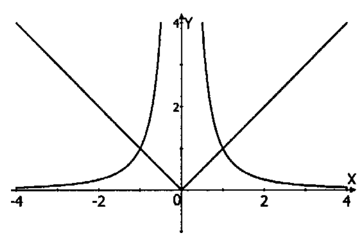
Точек пересечения нет;

в) $y=x^{-7}$ и y=–x



Точек пересечения нет;

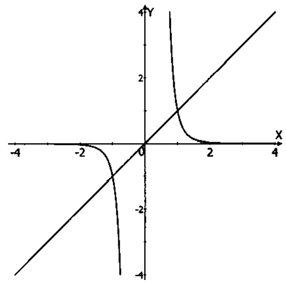
г) $y=\frac{1}{x^2}$ и y=|x|



Точки пересечения (1; 1) и (–1; 1);

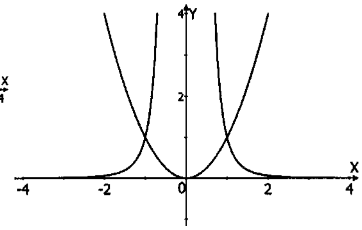
338.

а) $x^{-5}=x$



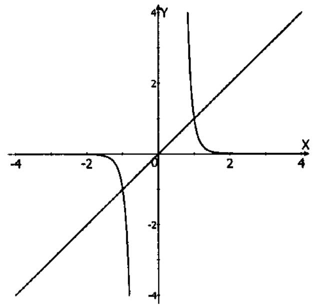
$x=1$, $x=-1$;

б) $\frac{1}{x^4}=x^2$



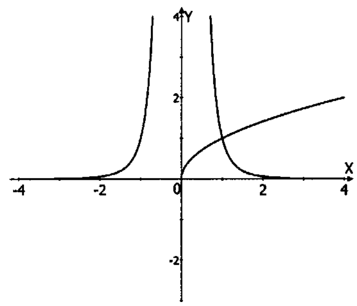
$x=1$, $x=-1$;

в) $\frac{1}{x^7}=x$



$x=1$, $x=-1$;

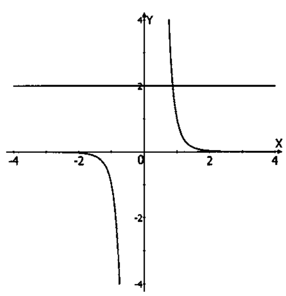
г) $x^{-4}=\sqrt{x}$



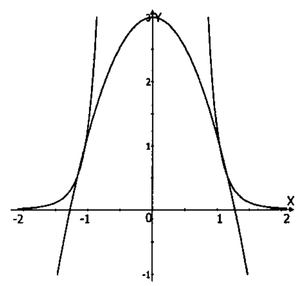
$x=1$.

339.

а) $\begin{cases} y=\frac{1}{x^5} \\ y=2 \end{cases}$

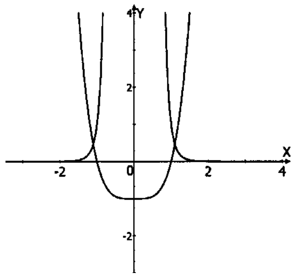


б) $\begin{cases} y=x^{-6} \\ y=3-2x^2 \end{cases}$



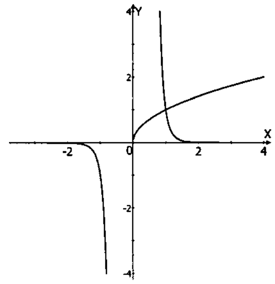
1 решение; 4 решения;

в) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^8} \\ y = x^4 - 1 \end{cases}$



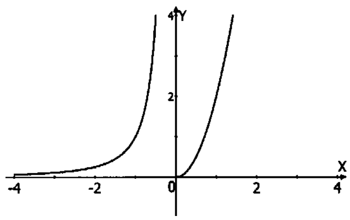
2 решения;

г) $\begin{cases} y = x^{-7} \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$



1 решение.

340.

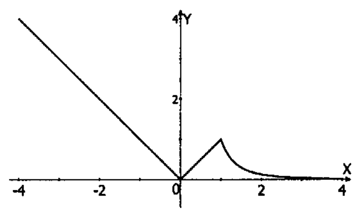


f(x)=$\begin{cases} x^{-2}, \text{если } x < 0 \\ 2x^2, \text{если } x \ge 0 \end{cases}$

1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная .
3) Возрастает на (–∞; 0) и на [0; +∞).
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на (–∞; 0) и на (0; +∞).
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла вниз на (–∞; 0) и на (0; +∞).

341.

f(x)=$\begin{cases} |x|, \text{если } x \le 1 \\ x^{-3}, \text{если } x > 1 \end{cases}$

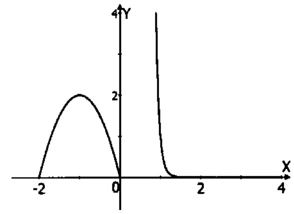


1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [0; 1].
Убывает на (–∞; 0) и на [1; +∞).
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на D(f).

7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла вниз на [1; +∞).
На (–∞; 1] можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

342.

f(x)=$\begin{cases} -2(x+1)^2+2, \text{если } -2 \le x \le 0 \\ x^{-12}, \text{если } x > 0 \end{cases}$



1) D(f)=[–2; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [–2; –1].
Убывает на [–1; 0] и на (0; +∞).
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на (0; +∞) и на [–2; 0).
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла: вверх на [–2; 0], вниз на (0; +∞).

343.

y=x^{-n}

а) (2; $\frac{1}{256}$); $\frac{1}{256}$=2^{-n}, n=8;

б) (–2; $-\frac{1}{32}$); $-\frac{1}{32}$=-2^{-n}, n=5;

в) (7; $\frac{1}{343}$); $\frac{1}{343}$=7^{-n}, n=3;

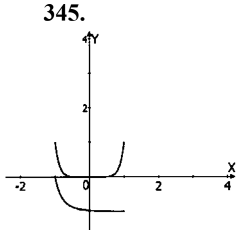
г) ($\frac{1}{5}$; 625); 625=$\frac{1}{5}^{-n}$, n=4.

344.

y=x^{-n}

а) (–1; 1);
1=-1^{-n}, n – четное. Функция четная.
б) (–1; –1);
–1=-1^{-n}, n – нечетное. Функция нечетная.
в) (1; 1);
1=1^{-n}, n –любое. Функция либо четная, либо нечетная.
г) (1; –1);
–1=1^{-n}, таких n не существует. Задание некорректно.

345.

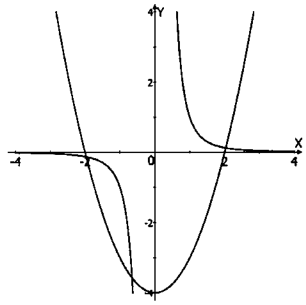


P=Q.

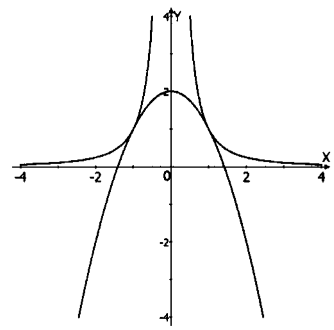
346.

а) $\begin{cases} y = x^{-3} \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$



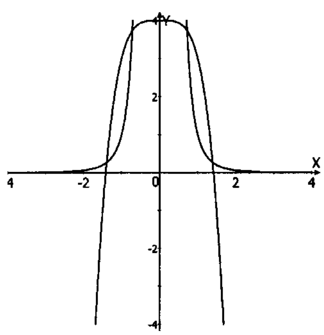
3 решения.

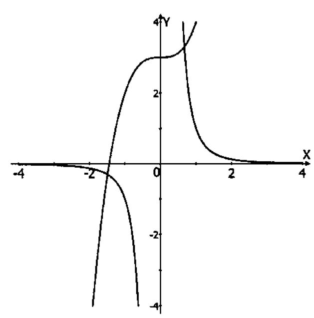


2 решения.

в) $\begin{cases} y = x^{-4} \\ y = 4 - x^4 \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^3} \\ y = x^3 + 3 \end{cases}$

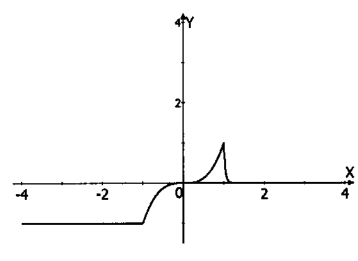




4 решения. 2
решения.

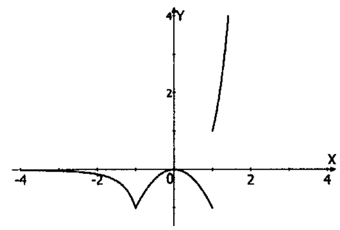
347.

а) f(x)= $\begin{cases} -1, \text{ если } x \le -1 \\ x^3, \text{ если -1} < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^{28}}, \text{ если } x > 1 \end{cases}$



1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [–1; 1].
Убывает на [1;+∞).
На (–∞; –1] постоянна.
4) Ограничена.
5) $y_{наим}$=–1, $y_{наиб}$ =1.
6) Непрерывна на D(f).
7) E(f)=[–1; 1].
8) Выпукла: вверх на [–1; 0], вниз на [0; 1] и на [1; +∞).
На (–∞; –1) можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

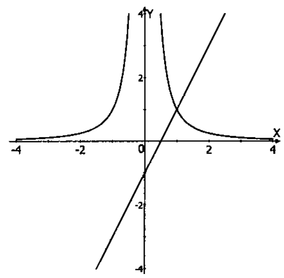
б) f(x)= $\begin{cases} x^{-3}, \text{если } x \le -1 \\ -x^2, \text{если -1} < x \le 1 \\ x^4, \text{если } x > 1 \end{cases}$



1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [1; +∞) и на [1; 0].
Убывает на (–∞; –1] и на [0; 1].
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=–1, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на (–∞; 1) и на (1; +∞).
7) E(f)=[–1; 0]∪[1; +∞).
8) Выпукла: вверх на (–∞; –1] и на [–1; 1], вниз на (1; +∞).

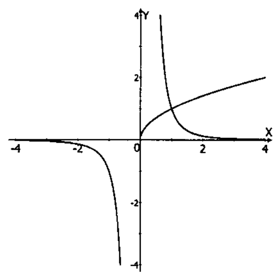
348.

а)



x<0, 0<x<1;

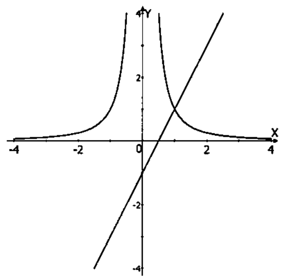
б)

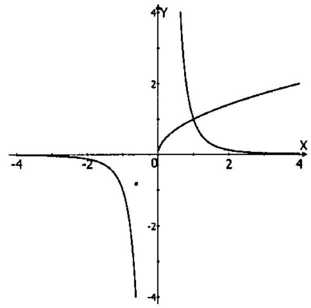


x≥1;

в)

г)





$x \geq 1$; $0<x<1$.

349.

$y=f(x)$, $f(x)=x^5$; $y=g(x)$, $g(x)=x^{-10}$;

$$\frac{(f(2x))^2}{32}=\frac{((2x)^5)^2}{32}=32\cdot x^{10}=32\cdot(g(x))^{-1}.$$

350.

$y=f(x)$, $f(x)=x^{-3}$; $y=g(x)$, $g(x)=x^4$;

$(f(x^2))^2=((x^2)^{-3})^2=(x^{-6})^2=x^{-12}=(x^4)^{-3}=g(x)^{-3}$.

351.

$y=f(x)$, $f(x)=x^2$; $y=g(x)$, $g(x)=x^{-4}$

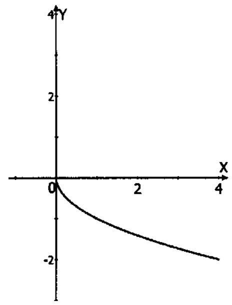
$$\frac{16}{f(x^2)}=\frac{16}{(x^2)^2}=\frac{16}{x^4}=(\frac{2}{x})^4=\left((\frac{2}{x})^{-4}\right)^{-1}=(g(\frac{2}{x}))^{-1}$$

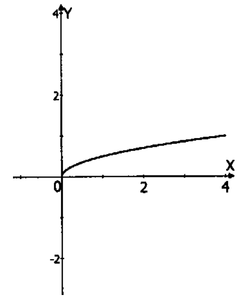
§ 15. Как построить график функции $y = mf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$

352.

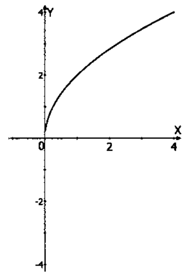
$y=f(x)$, $f(x)=\sqrt{x}$

а) б)

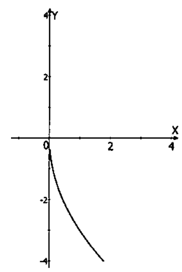




в)

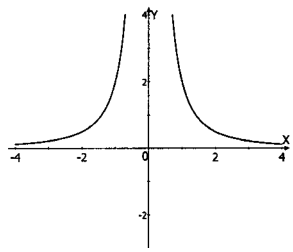


г)

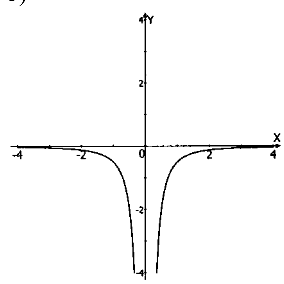


353.

а)

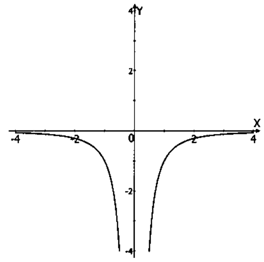


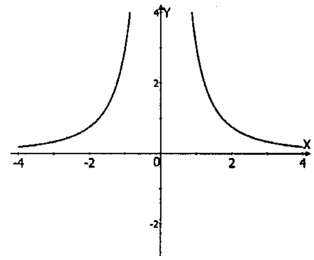
б)



в)

г)

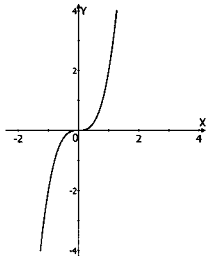


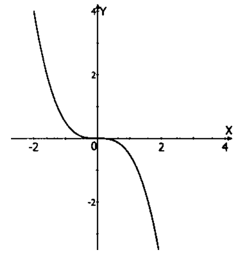


354.

а)

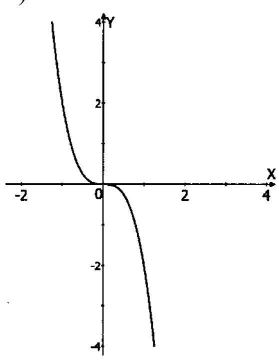
б)

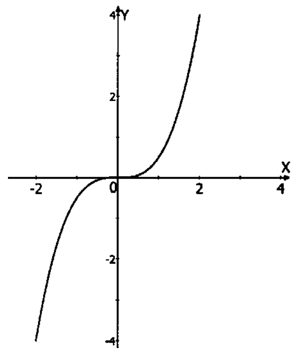




в)

г)

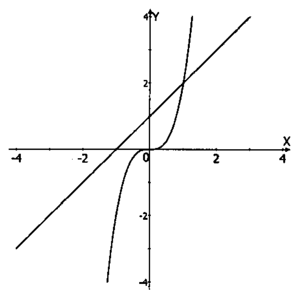




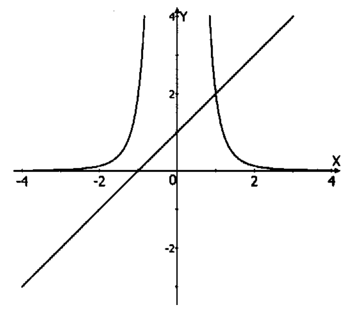
355.

а)

б)

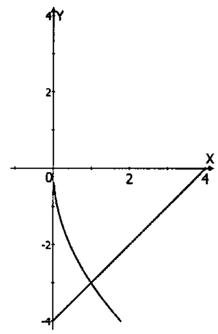


x=1.



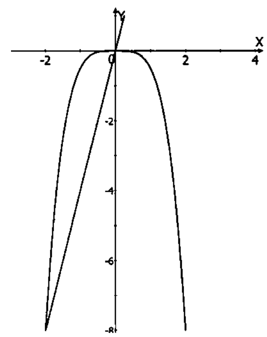
x=1.

в)



x=1;

г)



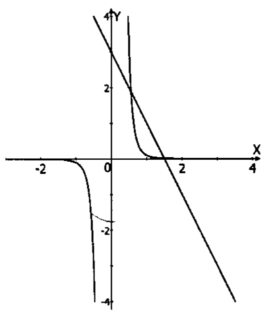
x=–2, x=0.

Опечатка в ответе задачника

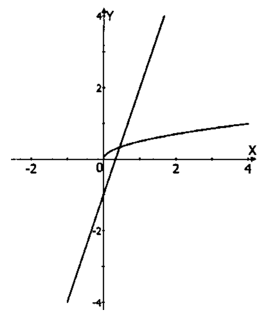
356.

а) $\dfrac{0{,}1}{x^5}$ =3–2x.

б) 0,5 $\sqrt{x}$ =3x–1.

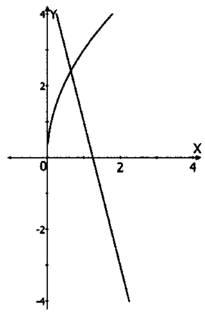


2 решения.

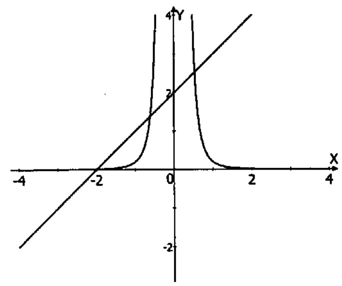


1 корень.

в) $3\sqrt{x}=5-4x$.　　　　　г) $0{,}2x^{-4}=2+x$.



1 корень.



3 корня.

357.

$y=3x^4$

а) на $[-\frac{1}{2}; 1]$ $y_{наим}=0$, $y_{наиб}=3$; б) на $[-1; 2)$ $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует;

в) на $[-1; -\frac{1}{2}]$ $y_{наим}=\frac{3}{16}$, $y_{наиб}=3$; г) на $[-1; 2]$ $y_{наим}=0$, $y_{наиб}=48$.

358.

$y=-2\sqrt{x}$

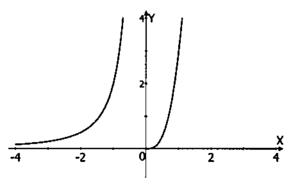
а) на отрезке $[0; 4]$ $y_{наим}=-4$, $y_{наиб}=0$;

б) на $[0; 9]$ $y_{наим}$ – не существует, $y_{наиб}=0$;

в) на $[\frac{1}{4}; \frac{9}{4}]$ $y_{наим}=-3$, $y_{наиб}=-1$;

г) на $(1; 1{,}96]$ $y_{наим}=-2{,}8$, $y_{наиб}$ – не существует.

359.



$$f(x)=\begin{cases}2x^{-2}, \text{если } x<0\\ 3x^3, \text{если } x\ge 0\end{cases}$$

1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $[0; +\infty)$.

4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

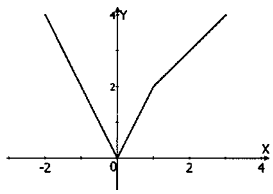
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

6) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

7) $E(f)=[0; +\infty)$.

8) Выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и на $[0; +\infty)$.

360.

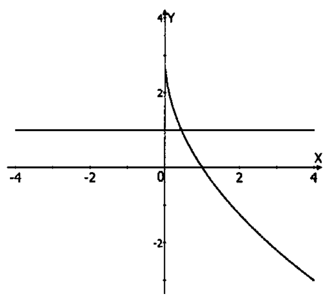


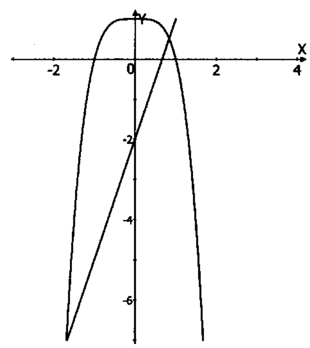
$$f(x)=\begin{cases} 2\,|\,x\,|, \text{если } x \le 1 \\ x+1, \text{если } x > 1 \end{cases}$$

1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $[0; +\infty)$.
Убывает на $(-\infty; 0)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на $D(f)$.
7) $E(f)=[0; +\infty)$.
8) Можно считать функцию как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз на $(-\infty; +\infty)$.

361.

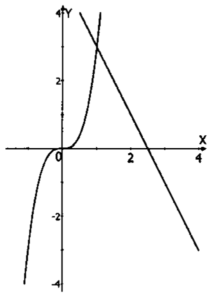
а) $\begin{cases} y = -3\sqrt{x} + 3 \\ y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 1 - x^4 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

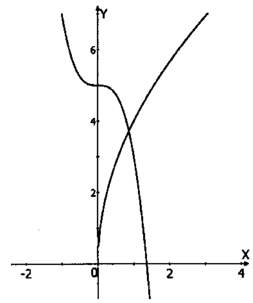




Одно решение. 2 корня.

в) $\begin{cases} y = 3x^3 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = 4\sqrt{x} \\ y = 5 - 2x^3 \end{cases}$

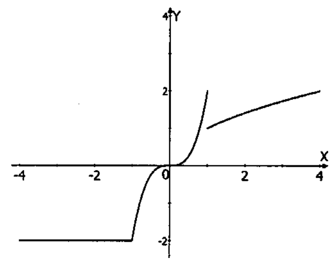




1 корень. 1 корень.

362.

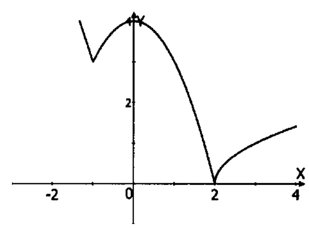
f(x)= $\begin{cases} -2, \text{если } x \le -1 \\ 2x^3, \text{если -1} < x \le 1 \\ \sqrt{x}, \text{если } x > 1 \end{cases}$



1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [–1; 1] и на (1; +∞).
На (–∞; –1] постоянна.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=–2, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на (–∞; 1) и на (1; +∞).
7) E(f)=[–2; +∞).
8) Выпукла: вверх на [–1; 0] и на (1; +∞), вниз на [0; 1].
На (–∞; –1] можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

363.

f(x)= $\begin{cases} 3\,|\,x\,|, \text{если } x \le -1 \\ 4 - x^3, \text{если -1} < x \le 2 \\ \sqrt{x-2}, \text{если } x > 2 \end{cases}$



1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [–1; 0] и на [2; +∞).
Убывает на (–∞; –1] и на [0; 2].
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на D(f). 7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла: вверх на [–1; 2] и на [2; +∞).

На $(-\infty; -1]$ можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

364.

а) $2x^3 \geq 3-x$; $2x^3-2 \geq 3-x-2$; $2(x^3-1)+(x-1) \geq 0$; $2(x-1)(x^2+x+1)+(x-1) \geq 0$

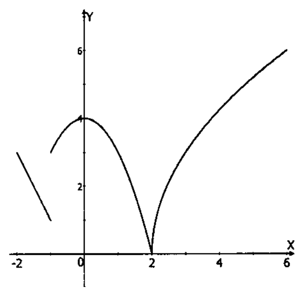
$(x-1)(2x^2+2x+3) \geq 0$; $2x^2+2x+3>0$, так как D=1–6=–5<0.

Разделим обе части на это выражение $(x-1) \geq 0$; $x \geq 1$;

б) $-x^4 < \sqrt{x}$; $-x^4 \leq 0 \leq \sqrt{x}$.

Единственная точка, где $\sqrt{x} = -x^4$ – есть 0. В остальных точках, принадлежащих области определения, неравенство верно. $x>0$.

365.



$$f(x)=\begin{cases} -1-2x, \text{ если } x \leq -1 \\ 4-x^2, \text{ если } -1 < x \leq 2 \\ 3\sqrt{x-2}, \text{ если } 2 < x \leq 6 \end{cases}$$

а)

б) При a<0 нет корней.

При a=0 или a>6 – 1 корень.

При 0<a<1 или 4<a≤6 – 2 корня.

При a=4 или 1≤a≤3 – 3 корня.

При 3<a<4 – 4 корня.

Домашняя контрольная работа.

ВАРИАНТ 1.

1. $f(x)=y=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+4x-12}}$; $x^2+4x-12>0$; $\dfrac{D}{4}=4+12=16$;

$\left[\begin{array}{l} x_1=-2+4=2 \\ x_2=-6 \end{array}\right.$; $(x+6)(x-2)>0$; $x>2$, $x<-6$. $D(f)=(-\infty; -6)\cup(2; +\infty)$.

2. $y=f(x)$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x-7}} \cdot \sqrt{\dfrac{x-4}{x-5}}$;

3. $E(f)=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

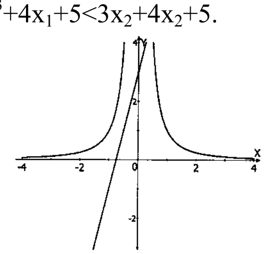
4. $f(x)=y=3x^3+4x+5$, $x\in[0; +\infty)$.

Возьмем произвольные x_1 и x_2 из $[0; +\infty)$, такие, что $x_1<x_2$. Тогда $x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 3x_1^3<3x_2^3 \Leftrightarrow 3x_1^3+4x_1<3x_2^3+4x_2 \Leftrightarrow 3x_1^3+4x_1+5<3x_2+4x_2+5$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

5. $h(x)=-2x-1$.

6. $x^{-2}=4x+3$.

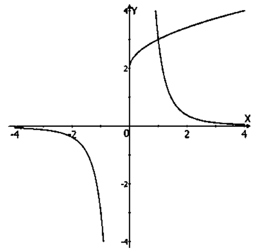


Один корень.

7. $f(x)=y=(x+2)^4-2$ на $[-1; 4]$

$y_{наим}=f(-1)=-1$; $y_{наиб}=f(4)=6^4-2=1294$.

8.



а) $x=1$;

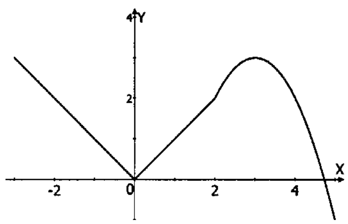
б) $0<x\le1$;

в) $x>1$.

9. $f(x)=x^{-2}$, $g(x)=x^4$

$$\frac{f(4x)}{f(x^2)}=\frac{(4x)^{-2}}{(x^2)^{-2}}=\frac{x^{-2}}{16x^{-4}}=\frac{x^2}{16}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^4}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{(\frac{x^2}{2})^4}=\frac{1}{4}\sqrt{y(\frac{x}{2})}$$

10. $f(x)=\begin{cases}|x|, \text{если } x<2\\ (-x-3)^2, \text{если } x\ge 2\end{cases}$



При $p>3$ – одно решение.

При $p=3$ и $p=0$ – 2 решения.

При $0<p<3$ – 3 решения.

При $p<0$ – одно решение.

ВАРИАНТ 2.

1. $f(x)=y=\dfrac{6}{\sqrt{-x^2+5x-24}}$; $-x^2+5x-24>0$; $x^2-5x+24<0$;

$D=25-24\cdot4=25-96=-71<0$.

Таких x не существует. $D(f)=\varnothing$.

2. y=f(x); f(x)= $\sqrt{\frac{3-x}{x+4}} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

3. E(f)={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

4. $f(x)=y=-x^4-x^2+8$, $x \in [0; +\infty)$.

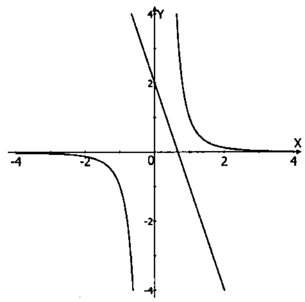
Возьмем произвольные x_1 и x_2 из $[0: +\infty)$, такие, что $x_1<x_2$. Тогда $x_1^4<x_2^4 \Leftrightarrow -x_1^4<-x_2^4$; $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2$

Складывая два последних неравенства, получим:

$-x_1^4-x_1^2>-x_2^4-x_2^2$; $-x_1^4-x_1^2+8>-x_2^4-x_2^2+8$; $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

5. $h(x)=-(x+1)^2+1$

6. $x^{-3}=2-3x$.

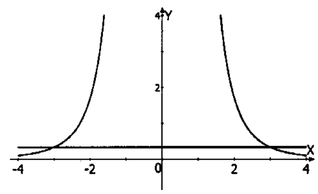


Корней нет.

7. $f(x)=y=(1-x)^3+3$ на отрезке [2; 3]

$y_{наим}=f(3)=-5$; $y_{наиб}=f(2)= 2$.

8.

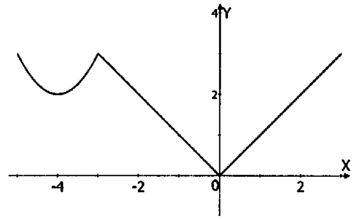


а) x=3, x=–3; б) x>3, x<–3; в) $0<x\le3$; $-3\le x<0$.

9. $f(x)=x^4$, $g(x)=x^{-1}$

При x<0, $\sqrt{4\sqrt{f(x)}}+2(g(x))^{-1}=2\sqrt{x^2}+2(x^{-1})^{-1}=2|x|+2x=-2x+2x=0$.

10. f(x)= $\begin{cases}(x+4)^2+2, \text{если } x<-3\\ |x|, \text{если } x\ge -3\end{cases}$



При p<0 корней нет.
При p=0 – один корень.
При 0<p<2 – 2 корня.
При p=2 и p≥3 – 3 корня.
При 2<p<3 – 4 корня.

Глава 4. Прогрессии

§ 17. Определение числовой последовательности и способы ее задания

366.

а) Нет, не является. б) Нет, не является.
в) Нет, не является. г) Да, является.

367.

а) Нет, не является. б) Нет, не является.
в) Нет, не является. г) Да, является.

368.

Пусть x – число минут, а y – число капель, упавших на землю.
Тогда моделью задачи будет функция $y=5x$, $x\in N$.
Эта математическая модель является числовой последовательностью.

369.

а) Да, $y_n=n^2$; $y_1=1$, $y_2=4$, $y_3=9$, $y_4=16$, $y_5=25$.
б) Да, $y_n=n^3$; $y_1=1$, $y_2=8$, $y_3=27$, $y_4=64$, $y_5=125$.
в) Да, $y_n=7$; $y_1=7$, $y_2=7$, $y_3=7$, $y_4=7$, $y_5=7$.
г) Нет.

370.

а) $y_n=n^2$.
б) Последовательность четных чисел.
в) $y_1=0$, $y_n=y_{n-1}+5$.

371.

Последовательность натуральных чисел, кратных пяти: 5, 10, 15, 20, 25 ...
$y_6=30$, $y_{21}=105$, $y_n=5n$.

372.

Последовательность натуральных чисел, кратных семи: 7, 14, 21, 28, 35 ...
$y_8=56$, $y_{10}=70$, $y_{37}=259$, $y_n=7n$.

373.

$a_1=1$, $a_2=8$, $a_3=27$, $a_4=64$, $a_5=125$, $a_n=n^3$.

374.

$c_1=2$, $c_2=4$, $c_3=8$, $c_4=16$, $c_n=2^n$.

375.

а) За y_{31} следует y_{32}, за y_n – y_{n+1}, за y_{n+9} – y_{n+10}, за y_{2n} – y_{2n+1};
б) члену y_{91} предшествует y_{90}, y_{639} – y_{638},
y_{n-1} – y_{n-2},
y_{3n} – y_{3n-1}.

376.

а) $a_{639}, a_{640}, a_{641}, a_{642}, a_{643}, a_{644}$; б) $a_{1003}, a_{1004}, a_{1005}, a_{1006}, a_{1007}$;
в) $a_{n+4}, a_{n+5}, a_{n+6}, a_{n+7}, a_{n+8}, a_{n+9}$; г) a_{n-1}, a_n, a_{n+1}.

377.

а) $a_n=4n+1$; $a_1=5, a_2=9, a_3=13, a_4=17, a_5=21$;
б) $c_n=-7n+3$; $c_1=-4, c_2=-11, c_3=-18, c_4=-25, c_5=-32$;
в) $b_n=5n+2$; $b_1=7, b_2=12, b_3=17, b_4=22, b_5=27$;
г) $a_n=-3n-7$; $a_1=-10, a_2=-13, a_3=-16, a_4=-19, a_5=-22$.

378.

а) $a_n=\frac{1}{n+5}$; $a_1=\frac{1}{6}, a_2=\frac{1}{7}, a_3=\frac{1}{8}, a_4=\frac{1}{9}, a_5=\frac{1}{10}$;

б) $d_n=\frac{-2}{3-n}$; $d_1=-1,\ d_2=-2,\ d_3$ – не существует; $d_4=2;\ d_5=1$

в) $c_n=\frac{3}{2n+4}$; $c_1=\frac{1}{2}, c_2=\frac{3}{8}, c_3=\frac{3}{10}, c_4=\frac{1}{4}, c_5=\frac{3}{14}$;

г) $a_n=\frac{-3}{4n-1}$; $a_1=-1, a_2=-\frac{3}{7}, a_3=-\frac{3}{11}, a_4=-\frac{1}{5}, a_5=-\frac{3}{19}$.

379.

а) $x_n=n^2+1$; $x_1=2, x_2=5, x_3=10, x_4=17, x_5=26$;
б) $y_n=-n^3-10$; $y_1=-11, y_2=-18, y_3=-37, y_4=-74, y_5=-135$;
в) $z_n=-n^3+5$; $z_1=4, z_2=-3, z_3=-22, z_4=-59, z_5=-120$;
г) $w_n=n^2-15$; $z_1=-14, z_2=-11, z_3=-6, z_4=1, z_5=10$.

380.

а) $y_n=n$; б) $y_n=n-3$; в) $y_n=n+5$; г) $y_n=-n$.

381.

а) $y_n=2n-1$; б) $y_n=3n$; в) $y_n=2n+2$; г) $y_n=4n$.

382.

а) $y_n=n^2$; б) $y_n=(n+1)^2$;
в) $y_n=n^2+1$; г) $y_n=n^3$.

383.

а) $x_1=1, x_2=4, x_3=1, x_4=4, x_5=1, x_6=4$;
б) $x_1=-5, x_2=5, x_3=15, x_4=25, x_5=35, x_6=45$;

в) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=7$, $x_5=9$, $x_6=11$;
г) $x_1=-3$, $x_2=1$, $x_3=-3$, $x_4=1$, $x_5=-3$, $x_6=1$.

384.
а) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=6$, $x_4=24$, $x_5=120$, $x_6=720$;
б) $x_1=-3$, $x_2=3$, $x_3=-3$, $x_4=3$, $x_5=-3$, $x_6=3$;
в) $x_1=-512$, $x_2=-256$, $x_3=-128$, $x_4=-64$, $x_5=-32$, $x_6=-16$;
г) $x_1=1$, $x_2=10$, $x_3=100$, $x_4=1000$, $x_5=10000$, $x_6=100000$.

385.
а) $y_n=3n+4$; $y_{n+1}=3(n+1)+4=3n+4+3>3n+4=y_n$.
Последовательность возрастающая.
б) $y_n=5n-3$; $y_{n+1}=5(n+1)-3=5n-3+5>5n-3=y_n$.
Последовательность возрастающая.
в) $y_n=7n-2$; $y_{n+1}=7(n+1)-2=7n-2+7>7n-2=y_n$.
Последовательность возрастающая.
г) $y_n=4n-1$; $y_{n+1}=4(n+1)-1=4n-1+4>4n-1=y_n$.
Последовательность возрастающая.

386.
а) $y_n=-2n-3$; $y_{n+1}=-2(n+1)-3=-2n-3-2<-2n-3=y_n$.
Последовательность убывающая.
б) $y_n=-3n+4$; $y_{n+1}=-3(n+1)+4=-3n+4-3<-3n+4=y_n$.
Последовательность убывающая.
в) $y_n=4-5n$; $y_{n+1}=4-5(n+1)=4-5n-5<4-5n=y_n$.
Последовательность убывающая.
г) $y_n=-n+8$; $y_{n+1}=-(n+1)+8=-n+8-1<-n+8=y_n$.
Последовательность убывающая.

387.
$x_1=4$, $x_2=9$, $x_3=25$, $x_4=49$, $x_5=121$, $x_6=169$, $x_7=289$.

388.
а) $x_n=(-2)^n$; $x_1=-2$, $x_2=4$, $x_3=-8$, $x_4=16$, $x_5=-32$;
б) $c_n=(-1)^{n+1}-(-1)^n$; $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=-2$, $x_5=2$;
в) $b_n=2(-3)^{n-1}$; $b_1=2$, $b_2=-6$, $b_3=18$, $b_4=-54$, $b_5=162$;
г) $d_n=(-2)^n+(-2)^{n+1}$; $d_1=-1$, $d_2=2$, $d_3=-4$, $d_4=8$, $d_5=-16$.

389.
а) $y_n=(-1)^n+(-2)^{n+1}$, $y_2=-7$, $y_4=-31$, $y_6=-127$;
б) $x_n=(-2)^{n+1}-(-2)^{n-1}$, $x_2=-8+2=-6$, $x_4=-32+8=-24$, $x_6=-128+32=-96$;
в) $z_n=(-2)^n-(-2)^{n+1}$, $z_2=4+8=12$, $z_4=16+32=48$,
$z_6=164+128=192$ – ответ в задачнике неверен;
г) $w_n=(-1)^{n+1}-(-2)^n$, $w_2=-1-4=-5$, $w_4=-1-16=-17$,

w_6=–1–64=–65 – ответ в задачнике неверен.

390.

а) $y_n=(-1)^n+2^n$, $y_1=1$, $y_3=7$, $y_5=31$;

б) $x_n=(-2)^n+16$, $x_1=14$, $x_3=8$, $x_5=-16$;

в) $y_n=(-2)^n+4^n$, $y_1=2$, $y_3=4$ – ответ в задачнике неверен; $y_5=-12$;

г) $y_n=(-1)^n-1$, $y_1=-2$, $y_3=-2$, $y_5=-2$.

391.

а) $x_n=\frac{1}{2n-1}$; б) $x_n=\frac{n}{n+1}$; в) $x_n=\frac{1}{n^2}$; г) $x_n=\frac{1}{n(n+10)}$.

392.

а) $x_n=(-1)^n\frac{2n}{3n-1}$; б) $x_n=\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$; в) $(-1)^{n+1}\frac{2^n}{5n}$; г) $(-1)^n\frac{n^2}{\sqrt{n(n+1)}}$.

393.

$x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_n=2\,(x_{n-2}+x_{n-1})$; $x_3=-10$, $x_4=-24$, $x_5=-68$, $x_6=-184$.

394.

а) $x_{n+1}=x_n$, $x_1=2$; б) $x_n=x_{n-1}+2$, $x_1=2$;

в) $x_n=x_{n-1}$ - 2, $x_1=9$; г) $x_n=-x_{n-1}$, $x_1=5$.

395.

а) $x_n=3x_{n-1}$, $x_1=2$;б)$x_n=x_{n-1}+7$,$x_1=1$;

в)$x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}$,$x_1=\frac{1}{2}$; г)$x_n=-3x_{n-1}$,$x_1=3$;

396.

а) 1; 1,7; 1,73; 1,732; б) 2, 1,8;1, 74; 1,733.

397.

a_n – последовательность

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$=0,1+0,11+0,111+0,1111+0,11111+0,111111+0,1111111=

=0,7654321.

398.

$x_n=\frac{n+1}{3n+2}$;

а) $\frac{5}{14}$; $\frac{5}{14}=\frac{n+1}{3n+2}\Leftrightarrow 15n+10=14n+14$; n=4;

б) $\frac{14}{41}$; $\frac{14}{41}=\frac{n+1}{3n+2}\Leftrightarrow 42n+28=41n+41$; n=13;

в) $\frac{6}{13}$; $\frac{6}{13}=\frac{n+1}{3n+2} \Leftrightarrow 18n+12=13n+13$;

$5n=1$, т. е. $n=\frac{1}{5}$, чего, очевидно, быть не может, так как $n \in N$;

г) $\frac{8}{23}$; $\frac{n+1}{3n+2}=\frac{8}{23}$; $23n+23=24n+16$; $n=7$.

399.

$a_n(2n-1)(3n+2)$

а) $0=(2n-1)(3n+2)$

$n=\frac{1}{2}$ или $n=-\frac{2}{3}$, чего, очевидно, быть не может, так как $n \in N$.

Такого n не существует, значит 0 – не член последовательности.

б) $24=(2n-1)(3n+2)$

$6n^2+n-26=0$;

$D=1+624=625$;

$n_1=\frac{-1+25}{12}=2$;

$n_2=\frac{-1-25}{2}<0$ – не подходит, так как n–натуральное.

Итак, n=2. 24 – второй член последовательности.

в) $153=(2n-1)(3n+2)$;

$6n^2+n-155=0$;

$D=1+3720=3721=61^2$;

$n_1=\frac{-1+61}{12}=5$;

$n_2=\frac{-1-61}{12}<0$, не подходит, так как $n \in N$.

Итак, n=5.

153 – пятый член последовательности.

г) $-2=(2n-1)(3n+2)$

Оба множителя в правой части положительны (так как $n \in N$), а левая часть отрицательна. Такого быть не может.

Таких n нет, (–2) – не член последовательности.

400.

а) $x_1=3$, $x_n=x_{n-1}+5$; $x_n=3+5(n-1)=5n-2$;

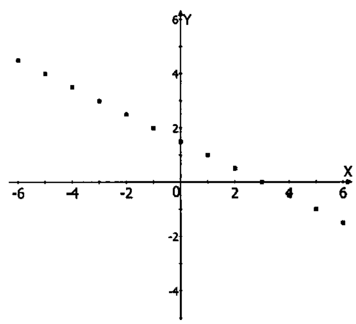
б) $x_1=2$, $x_n=3\cdot x_{n-1}$; $x_n=2\cdot 3^{n-1}$;

в) $x_1=11$, $x_n=x_{n-1}-4$; $x_n=11-4(n-1)=15-4n$;

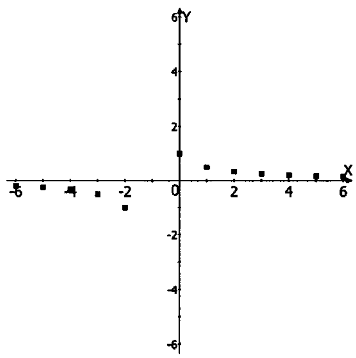
г) $x_1=3$, $x_n \frac{x_{n-1}}{2}$; $x_n=\frac{3}{2^{(n-1)}}$.

401.

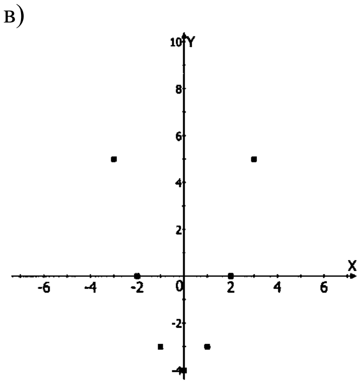
а)



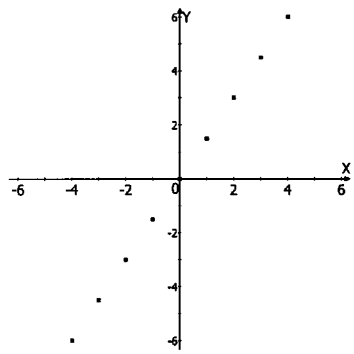
б)



в)



г)



402.

а) $x_n=2n-5$, A=10; $2n-5>10$; $2n>15$

$n>\frac{15}{2}$; Начиная с n=8;

б) $x_n=3^{n-1}$, A=27,

$3^{n-1}>27$,

$n-1>3$,

$n>4$.

Начиная с n=5;

в) $x_n=n^2-17$, A=–2

$n^2-17>-2$,

$n^2>15$,

$n>\sqrt{15}$ ($n<-\sqrt{15}$ отбрасываем, так как $n\in N$).

Начиная с n=4;

г) $x_n=2^{n-5}$, A=1,5,

$2^{n-5}>1{,}5$,

$2^{n-5}>\frac{3}{2}$,

$2^{n-4}>3$.

Начиная с n=6.

403.

а) $x_n=3-2n$, A=–9,

$3-2n<-9$,

$2n<12$,

$n>6$.

Начиная с n=7;

б) $x_n=3^{4-n}$, A=0,5,

$3^{4-n}<0,5$.
Начиная с n=5.
в) $x_n=2-3n^2$, A=–25,
$2-3n^2<-25$,
$3n^2<28$,
$n^2>\frac{28}{3}$.
Начиная с n=4;
г) $x_n=2^{5-n}$, A=1,
$2^{5-n}<1$,
$5-n<0$,
$n>5$.
Начиная с n=6.

404.

а) $a_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$;

$a_{n+1}=1-\frac{1}{n+1}>1-\frac{1}{n}=a_n$;

$a_{n+1}>a_n$. Последовательность возрастает.

б) $b_n=1-\frac{1}{2n}$;

$b_{n+1}=1-\frac{1}{2(n+1)}>1-\frac{1}{2n}=b_n$;

$b_{n+1}>b_n$. Последовательность возрастает.

в) $c_n=1-\frac{1}{2^n}$;

$c_{n+1}=1-\frac{1}{2^{n+1}}>1-\frac{1}{2^n}=c_n$;

$c_{n+1}>c_n$. Последовательность возрастает.

г) $d_n=\frac{5n}{n+1}=\frac{5n+5-5}{n+1}=5-\frac{5}{n+1}$;

$d_{n+1}=5-\frac{5}{n+2}>5-\frac{5}{n+1}=d_n$;

$d_{n+1}>d_n$. Последовательность возрастает.

405.

а) $a_n=\frac{1}{2n}$;

$a_{n+1}=\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{2n}=a_n$;

$a_{n+1}<a_n$.
Последовательность убывает.

б) $c_n=1+\frac{1}{3n}$;

$a_{n+1}=\frac{1}{3n+3}<\frac{1}{3n}=c_n$;

$c_{n+1}<c_n$.
Последовательность убывает.

в) $b_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$;

$b_{n+1}=1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}=b_n$;

$b_{n+1}<b_n$.
Последовательность убывает.

г) $d_n=\frac{1}{3^n}$;

$d_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}}<\frac{1}{3^n}=d_n$;

$d_{n+1}<d_n$.
Последовательность убывает.

§ 18. Арифметическая прогрессия

406.
а) Да, является. б) Да, является.
в) Да, является. г) Нет, не является.

407.
а) Да, является.
б) Нет, не является.
в) Нет, не является.
г) Нет, не является.

408.
а) $a_1=3$; $d=-4$;
б) $a_1=7$; $d=-3$;
в) $a_1=0,7$; $d=0,2$;
г) $a_1=-1$; $d=0,1$.

409.
а) $a_1=3$; $d=7$,
$a_1=3$, $a_2=10$, $a_3=17$, $a_4=24$, $a_5=31$, $a_6=38$;

б) $a_1=10$; $d=-2,5$,

$a_1=10$, $a_2=7,5$, $a_3=5$, $a_4=2,5$, $a_5=0$, $a_6=-2,5$;

в) $a_1=-21$; $d=3$,

$a_1=-21$, $a_2=-18$, $a_3=-15$, $a_4=-12$, $a_5=-9$, $a_6=-6$;

г) $a_1=-17,5$; $d=-0,5$.

$a_1=-17,5$, $a_2=-18$, $a_3=-18,5$, $a_4=-19$, $a_5=-19,5$, $a_6=-20$.

410.

а) $a_1=-2$; $d=4$, $n=5$; -2; 2; 6; 10; 14;

б) $a_1=1$; $d=-0,1$, $n=7$; 1; $0,9$; $0,8$; $0,7$; $0,6$; $0,5$; $0,4$;

в) $a_1=2$; $d=3$, $n=6$; 2; 5; 8; 11; 14; 17

г) $a_1=-6$; $d=1,5$, $n=4$; -6; $-4,5$; -3; $-1,5$.

411.

а) $a_1=\frac{3}{7}$; $d=\frac{1}{7}$, $n=5$

$\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$; 1;

б) $a_1=13$; $d=-\sqrt{5}$, $n=4$

13; $13-\sqrt{5}$; $13-2\sqrt{5}$; $13-3\sqrt{5}$;

в) $a_1=7,5$; $d=0,5$, $n=4$

$7,5$; 8; $8,5$; 9;

г) $a_1=-1,7$; $d=0,15$, $n=5$

$-1,7$; $-1,55$; $-1,4$; $-1,25$; $-1,1$.

411.

а) $a_1=\frac{3}{7}$; $a_2=\frac{4}{7}$; $a_3=\frac{5}{7}$; $a_4=\frac{6}{7}$; $a_5=1$;

б) $a_1=13$, $a_2=13-\sqrt{5}$; $a_3=13-2\sqrt{5}$; $a_4=13-3\sqrt{5}$;

в) $a_1=7,5$; $a_2=8$; $a_3=8,5$; $a_4=9$;

г) $a_1=-1,7$; $a_2=-1,55$; $a_3=-1,4$; $a_4=-1,25$; $a_5=-1,1$.

412.

а) $d=a_2-a_1=3-1=2$; $a_{10}=a_1+9d=1+9\cdot 2=19$;

б) $d=a_2-a_1=6+\sqrt{5}-\sqrt{5}=6$; $a_{10}=a_1+9d=\sqrt{5}+9\cdot 6=54+\sqrt{5}$;

в) $d=a_2-a_1=90-100=-10$; $a_{10}=a_1+9d=100+9\cdot(-10)=10$;

г) $d=a_2-a_1=3-\sqrt{2}-3=-\sqrt{2}$; $a_{10}=a_1+9d=3+9(-\sqrt{2})=3-9\sqrt{2}$.

413.

Такие натуральные числа, представляются в виде $n=3+5k$, где $k=1, 2, 3$ ... , так что они составляют арифметическую прогрессию: $a_1=3$; $d=5$. Опечатка в ответе задачника.

414.

Такие натуральные числа, представляются в виде n=11k, где k=1, 2, 3 ... , так что они составляют арифметическую прогрессию: $a_1=11$; d=11.

415.

Данные числа не являются арифметической прогрессией, так как $a_2-a_1=3^2-3^1$, а $a_3-a_2=3^3-3^2=18$, и $3\neq 18$.

416.

а) $x_1=4$; d=3; б) не является арифметической прогрессией; в) не является арифметической прогрессией; г) $x_1=1$; d=4.

417.

а) $a_n=2n+1$; $a_n=(n-1)\cdot 2+3=(n-1)\cdot d+a_1$, где $a_1=3$ и d=2;

б) $a_n=0,5n-4$; $a_n=(n-1)\cdot 0,5-3,5=(n-1)\cdot d+a_1$, где $a_1=-3,5$ и d=0,5;

в) $a_n=-3n+1$; $a_n=(n-1)\cdot(-3)-2=(n-1)\cdot d+a_1$, где $a_1=-2$ и d=-3;

г) $a_n=-\frac{1}{3}n-1$; $a_n=(n-1)(-\frac{1}{3})-\frac{4}{3}=(n-1)\cdot d+a_1$, где $a_1=-\frac{4}{3}$ и $d=-\frac{1}{3}$.

418.

а) $a_n=3n-1$; б) $a_n=n-0,5$; в) $a_n=-2n+9$; г) $a_n=-\frac{n}{7}-\frac{6}{7}$.

419.

а) $a_n=-6n+10$; б) $a_n=-0,2n-0,5$; в) $a_n=5n-12$; г) $a_n=\sqrt{5}\,n-3\sqrt{5}$.

420.

$a_6=a_1+5d=4+5\cdot 3=19$; б) $a_{15}=a_1+14d=-15+14(-5)=-85$;

в) $a_{17}=a_1+16d=-12+16\cdot 2=20$; г) $a_9=a_1+8d=101+8\cdot\frac{1}{2}=105$.

421.

а) $a_5=a_1+4d$, $d=\frac{a_5-a_1}{4}=\frac{40-12}{4}=7$;

б) $a_{16}=a_6+10d$, $d=\frac{a_{16}-a_6}{10}=\frac{30-(-30)}{10}=6$;

в) $a_{11}=a_1+10d$, $d=\frac{a_{11}-a_1}{10}=\frac{-28-(-8)}{10}=-2$; опечатка в ответе задачника

г) $a_{36}=a_{11}+25d$, $d=\frac{a_{36}-a_{11}}{25}=\frac{54,6-4,6}{25}=2$.

422.

а) $a_7=a_1+6d$, $a_1=a_7-6d=9-6\cdot2=-3$;
б) $a_{37}=a_1+36d$, $a_1=a_{37}-36d=-69-36(-2,5)=21$;
в) $a_{26}=a_1+25d$, $a_1=a_{26}-25d=-71-25(-3)=4$;
г) $a_{14}=a_1+13d$, $a_1=a_{14}-13d=-6\sqrt{5}-13(-\sqrt{5})=7\sqrt{5}$.

423.

а) $a_1=1$; $d=3$; б) $a_1=-\frac{4}{3}$; $d=-\frac{1}{3}$; в) $a_1=2,9$; $d=-0,1$; г) $a_1=3$; $d=-2$.

424.

У данной прогрессии $a_1=9$ и $d=2$, тогда если $a_n=29$, то $29=9+2(n-1)$, $29=7+2n$, $n=11$.

425.

а) $a_1=-1,5$; $d=0,5$, так что $4,5=a_1+12d$, то есть 4,5 - 13-й член прогрессии;
б) $a_1=7,5$; $d=3,5$, так что если $43,5=a_1+nd$, то $n=\frac{43,5-a_1}{d}=\frac{36}{3,5}=\frac{72}{7}$, так что 43,5 - не является членом прогрессии.

426.

$41=-7+12\cdot4=a_1+12d$, так что 41 - 13-й член данной прогрессии.

427.

23; 19; 15.

428.

а) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=1+10\cdot2=21$;
б) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=-1\frac{1}{2}+20\cdot(-3,75)=-76,5$;
в) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=\frac{2}{3}+16\cdot\frac{3}{4}=12\frac{2}{3}$;
г) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=0,2+12\cdot\frac{1}{3}=4,2$.

429.

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, так что $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$;
а) $n=\frac{(67-1)\cdot3}{2}+1=100$; б) $n=\frac{5-0}{0,5}+1=11$;
в) $n=\frac{10,5-(-6)}{0,75}+1=23$; г) $n=\frac{100-(-4,5)}{5,5}+1=20$.

430.

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$; $a_1=a_n-(n-1)d$:

а) $a_1=-10-14\cdot2=-38$; б) $a_1=10\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{4}=9$;

в) $a_1=9{,}5-16\cdot(-0{,}6)=19{,}1$; г) $a_1=-2{,}94-14\cdot(-0{,}3)=1{,}26$.

431.

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, $d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$:

а) $d=\frac{39-3}{11-1}=3{,}6$; б) $d=\frac{-18{,}4-(-0{,}2)}{15-1}=-1{,}3$;

в) $d=\frac{1\frac{1}{4}-5\frac{5}{8}}{36-1}=-\frac{1}{8}$; г) $d=\frac{0-3{,}6}{37-1}=-0{,}1$.

432.

$b=a_1+(n-1)d$, $n=\frac{b-a_1}{d}+1$, если b - является членом прогрессии:

а) $n=\frac{21{,}2-5}{0{,}3}+1=55$; б) $n=\frac{0{,}65-3}{-0{,}35}+1\approx7{,}7$ - так b - не является членом прогрессии;

в) $n=\frac{44-(-7)}{5{,}1}+1=11$; г) $n=\frac{-0{,}01-(-0{,}13)}{0{,}02}+1=7$.

433.

а) $a_n=a_1+(n-1)d$, $a_n=2+(n-1)(-0{,}1)=2{,}1-0{,}1n$, $a_n<0$ при $2{,}1-0{,}1<0$, $n>21$, $n=22$;

б) $a_n=16{,}3-0{,}4n$, $a_n<0{,}9$, при $16{,}3-0{,}4n<0{,}9$, $n>38{,}5$, $n=39$;

в) $a_n=120-10n$, $a_n<15$, при $120-10n<15$, $n>10{,}5$, $n=11$;

г) $a_n=-0{,}25-0{,}75n$, $a_n<-16{,}3$, при $-0{,}25-0{,}75n<-16{,}3$, $n>21{,}4$, $n=22$.

434.

а) $a_n=-12+(n-1)\cdot3=-15+3n$, $a_n>141$, при $-15+3n>141$, $n>52$, $n=53$;

б) $a_n=-10+5{,}5n$, $a_n>0$, при $-10+5{,}5n>0$, $n>\frac{20}{11}$, $n=2$;

в) $a_n=1{,}8+2{,}2n$, $a_n>14{,}7$, при $1{,}8+2{,}2n>14{,}7$, $n>\frac{129}{22}$, $n=6$;

г) $a_n=13{,}8+0{,}7n$, $a_n>22{,}9$, при $13{,}8+0{,}7n>22{,}9$ $n>13$, $n=14$.

435.

$\begin{cases} a_1+a_5=14 \\ a_2a_4=45 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1+a_1+4d=14 \\ (a_1+d)(a_1+3d)=45 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1+2d=7 \\ (7-d)(7+d)=45 \end{cases}$,

$\begin{cases} a_1=7-2d \\ 49-d^2=45 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1=7-2d \\ d^2=4 \end{cases}$, так как d>0 по условию, то d=2.

Тогда $a_6=a_1+5d=3+10=13$.

436.

$\begin{cases} a_2+a_5=18 \\ a_2\cdot a_3=21 \end{cases}$, $\begin{cases} a_2+a_2+3d=17 \\ a_2(a_2+d)=21 \end{cases}$, $\begin{cases} 2a_2+3d=17 \\ a_2(a_2+d)=21 \end{cases}$,

так как a_2 - натуральное число, то $a_2=3$ и d=4, тогда $a_1=-1$ и прогрессия: -1, 3, 7, 11, 15 ...

437.

$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=-21 \\ a_2+a_3+a_4=-6 \end{cases}$, и a_1, a_2, a_3, a_4 - арифметическая прогрессия, так что

$\begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d=-21 \\ a_1+d+a_1+2d+a_1+3d=-6 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1+d=-7 \\ a_1+2d=-2 \end{cases}$, $a_1=-12$, d=5,

эти числа: -12, -7, -2, 3. (опечатка в ответе задачника)

438.

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$:

а) $S_{30}=\frac{-1+86}{2}\cdot 30=1275$; б) $S_{20}=\frac{41-16}{2}\cdot 20=250$;

в) $S_{10}=\frac{-13-5}{2}\cdot 10=-90$; г) $S_{25}=\frac{17+31}{2}\cdot 25=600$.

439. а) $S_{50}=\frac{2+147}{2}\cdot 50=3725$; б) $S_{50}=\frac{0{,}5-97{,}5}{2}\cdot 50=-2425$;

в) $S_{50}=\frac{-10+137}{2}\cdot 50=3175$; г) $S_{50}=\frac{-1{,}7-8{,}1}{2}\cdot 50=245$.

440.

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$, $S_{100}=100a_1+4950d$:

а) $S_{100}=100\cdot(-12)+4950\cdot 2=8700$; б) $S_{100}=100\cdot(1{,}5)+4950\cdot 0{,}5=262$;

в) $S_{100}=100\cdot 73+4950(-1)=2350$; г) $S_{100}=100\cdot(-1{,}7)+4950\cdot(8{,}1)=-40265$.

441.

$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$:

а) $S_{16}=\frac{-3\cdot 2+15\cdot 1{,}5}{2}\cdot 16=132$; б) $S_{25}=\frac{2\cdot 121+24\cdot(-3{,}1)}{2}\cdot 25=2095$;

в) $S_{40}=\frac{2\cdot(-2{,}5)+39\cdot(-0{,}5)}{2}\cdot 40=-490$; г) $S_{100}=\frac{2\cdot 4{,}5+99\cdot 0{,}4}{2}\cdot 100=2430$.

442.

$S_{30}=\frac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30=15(a_1+a_{30})$:

а) $S_{30}=15(4+3+4\cdot 30+3)=1950$;
б) $S_{30}=15(0{,}5-3+0{,}5\cdot 30-3)=142{,}5$;
в) $S_{30}=15(-2+8-2\cdot 30+8)=-690$; г) $S_{30}=15(-2{,}5-6-2{,}5\cdot 30-6)=1342{,}5$

443.

a_1	d	a_n	n	S_n
7	4	55	13	403
2	2	80	40	1640
56	-3	26	11	451
2	5	87	18	801
9	2	21	7	105

444.

$a_4=10$, $a_{10}=19$, $a_{10}-a_4=6d=9$, $d=1{,}5$, $a_1=a_4-3d=10-3\cdot 1{,}5=5{,}5$,

$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10=\frac{5{,}5+19}{2}\cdot 10=122{,}5$.

445.

а) $a_{12}=\frac{a_{11}+a_{13}}{2}=\frac{122}{2}=61$; б) $a_{18}+a_{20}=2\cdot a_{19}=2\cdot 5=10$;

в) $a_6+a_8=2a_7=2\cdot 4=8$; г) $a_{16}=\frac{a_{15}+a_{17}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$.

446.

а) $a_2+a_{19}=a_1+a_{20}=64$; б) $a_1+a_{19}=a_3+a_{17}=-40$;
в) $a_1+a_{16}=a_2+a_{15}=25$; г) $a_{10}+a_{16}=a_1+a_{25}=-10$.

447.

$a_{10}+a_{20}=\frac{a_9+a_{11}}{2}+\frac{a_{19}+a_{21}}{2}=\frac{44}{2}+\frac{104}{2}=74$.

448.

$a_{15}+a_{30}=\frac{a_{14}+a_{16}}{2}+\frac{a_{29}+a_{31}}{2}=\frac{-20}{2}+\frac{40}{2}=10.$

449.

Если x, 2x-1,5x - члены прогрессии, то

$\frac{x+5x}{2}$=2x-1, то есть 3x=2x-1, x=-1.

450.

Если 2y+5, y, 3y-8 - члены прогрессии, то

$\frac{2y+5+3y-8}{2}$=y, 5y-3=2y, y=1.

451.

Если 5t+2, 7t=1, 3t-6 - образуют прогрессию, то $\frac{5t+2+3t-6}{2}$=7t+1,

4t-2=7t+1, t=-1.

452.

а) $a_n=-\frac{n+1}{4}$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{1}{4}$;

б) $a_n=\frac{2\sqrt{3}-5n}{3}$, $a_1=\frac{2\sqrt{3}-5}{3}$, $d=-\frac{5}{3}$;

в) $a_n=\frac{3n-2}{5}$, $a_1=\frac{1}{5}$, $d=\frac{3}{5}$; г) $a_n=\frac{\sqrt{7}n-5}{\sqrt{5}}$, $a_1=\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{5}}$, $d=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

453.

а) $d_1=\frac{a_{12}-a_5}{7}=\frac{29-15}{7}=2$, $a_1=a_5-4d=15-4\cdot2=7$,

$a_n=a_1+(n-1)d=7+(n-1)\cdot2=2n+5$;

б) $d=\frac{a_{19}-a_9}{10}=\frac{-4{,}5-(-30)}{10}=-1{,}5$, $a_1=a_9-8d=-30-8(-1{,}5)=-18$,

$a_n=a_1+(n-1)d=-18+(n-1)(-1{,}5)=-1{,}5n-16{,}5$;

в) $d=\frac{a_{15}-a_7}{8}=\frac{40-20}{8}=2{,}5$, $a_1=a_7-6d=20-6\cdot2{,}5=5$,

$a_n=a_1+(n-1)d=5+(n-1)\cdot2{,}5=2{,}5n+2{,}5$;

г) $d=\frac{a_{16}-a_5}{11}=\frac{-7{,}5-0{,}2}{11}=-0{,}7$, $a_1=a_5-4d=-0{,}2-4(-0{,}7)=2{,}6$,

$a_n=a_1+(n-1)d=2{,}6+(n-1)(-0{,}7)=-0{,}7n+3{,}3$.

454.

а) d=$\frac{a_9-a_7}{2}=\frac{8-(-2)}{2}$=5, a_8=$\frac{a_7+a_9}{2}=\frac{8+(-2)}{2}$=3;

б) a_8=$\frac{a_9+a_7}{2}=\frac{4+(-4)}{2}$=0, d=$a_9$-$a_8$=-4;

в) a_8=$\frac{a_7+a_9}{2}=\frac{-7+(-1)}{2}$=-4, d=$a_9$-$a_8$=-1-(-4)=3;

г) a_8=$\frac{a_7+a_9}{2}=\frac{-0{,}9+(-0{,}7)}{2}$=-0,8, d=$a_8$-$a_7$=-0,8-(-0,7)=-0,1.

455.

a_1=-8, a_4=-35, тогда d=$\frac{a_4+a_1}{3}=\frac{-35-(-8)}{3}$=-9 и

a_2=a_1+d=-17, a_3=a_4-d=-26.

-8, -17, -26, -35, d=-9.

456. a_n=a_1+(n-1)d:

а) a_7=-$\sqrt{2}$ +6·(1+$\sqrt{2}$)=5$\sqrt{2}$ +6; б) a_{15}=3-$\sqrt{5}$ +14·2$\sqrt{5}$ =27$\sqrt{5}$ +3;

в) a_{12}=9$\sqrt{3}$ -2+11·(2-$\sqrt{3}$)=20-2$\sqrt{3}$; г) a_9=$\frac{5\sqrt{3}-7}{3}$ -8·$\frac{\sqrt{3}-2}{3}$ =3-$\sqrt{3}$.

457.

n=$\frac{a_n-a_1}{d}$ +1:

а) n=$\frac{6-\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ +1=7; б) n=$\frac{13\sqrt{2}-2-5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$ +1=8;

в) n=$\frac{13-5\sqrt{5}-5+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ +1=5; г) n=$\frac{1-\frac{5\sqrt{3}-7}{3}}{-\frac{\sqrt{3}-2}{3}}$ +1=6.

458.

a_1=a_n-(n-1)d:

а) a_1=10$\sqrt{3}$ -4-23·$\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{15-3\sqrt{3}}{2}$; б) a_1=28+27q-27(1+q)=1;

в) a_1=2$\sqrt{3}$ +5-20$\frac{\sqrt{3}}{2}$=5-8$\sqrt{3}$; г) a_1=l-21(1-3l)=64l-21.

459.

d=$\frac{a_n-a_1}{n-1}$:

а) d=$\frac{-2\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}-3}{2\cdot 17}$=-$\frac{2\sqrt{3}}{17}$; б) d=$\frac{m-5-3+7m}{8}$=m-1,

в) d=$\frac{0-\sqrt{5}+1}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{5}$; г) d=$\frac{2p+3-13+8p}{10}$=p-1.

460.

а) 13-0,4n=4,6, n=21; б) 5n-104=21, n=25;

в) 3n-5,7=69,4, n=$\frac{75,1}{3}$, так что b - не член прогрессии;

г) 21,3-1,7n=4,3, n=10.

461.

а) a_n<-41 при 12-3n<-41, n>$\frac{53}{3}$, n=18;

б) a_n<-7 при 3$\sqrt{3}$-n$\sqrt{3}$<-7, n>3+$\frac{7}{\sqrt{3}}$, n=8;

в) a_n<-10 при 117-5,5n<10, n<$\frac{107}{5,5}$, n=20;

г) a_n<-1 при 15$\sqrt{2}$-n($\sqrt{2}$-1)<-1, n>$\frac{15\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, n=49.

(опечатка в ответе задачника)

462.

а) a_n>$\sqrt{3}$ при 7n-121>$\sqrt{3}$, n>$\frac{121+\sqrt{3}}{7}$, n=18;

б) a_n>21 при n$\sqrt{2}$-4$\sqrt{2}$>21, n>$\frac{21+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, n=19;

в) a_n>2+3$\sqrt{5}$ при 5n-17,7>2+3$\sqrt{5}$, n>$\frac{19,7+3\sqrt{5}}{5}$, n=6;

г) a_n>5 при n($\sqrt{5}$-1)-3$\sqrt{5}$>5, n>$\frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$, n=10.

463.

a_n=6n-306:
а) a_n>-12 при 6n-306>-12, n>49, n=50;
б) a_n>0 при 6n-306>0, n>51, n=52;
в) a_n≥0 при 6n-306≥300, n≥101, n=101;
г) a_n>-6 при 6n-306>-6, n>50, n=51.

464.

a_1=42, d=-0,5, a_n=a_1+(n-1)d=42+(n-1)(-0,5)=-0,5n+42,5:

а) $a_n>0$ при $-0,5n+42,5>0$, $n<85$, $n=1, 2, \ldots, 84$;
б) $a_n<0$ при $-0,5n+42,5<0$, $n>85$, $n=86, 87, \ldots$;
в) $a_n\in(-\infty, 3]$ при $-0,5n+42,5\le 3$, $n\ge 79$, $n=79, 80, 81\ldots$;
г) $a_n\in[-4,5, 5,5]$ при $-4,5\le -0,5n+42,5\le 5,5$; $-47\le -0,5n\le -37$; $74\le n\le 94$, $n=74, 75, \ldots, 93, 94$.

465.

$$\begin{cases}\dfrac{a_9}{a_2}=5\\ \dfrac{a_{13}}{a_6}=2+\dfrac{5}{a_6}\end{cases},\ \begin{cases}\dfrac{a_1+8d}{a_1+d}=5\\ \dfrac{a_{13}-5}{a_1+d}=2\end{cases},\ \begin{cases}\dfrac{a_1+8d}{a_1+d}=5\\ \dfrac{a_1+12d-5}{a_1+d}=2\end{cases},$$

$$\begin{cases}a_1+8d=5a_1+5d\\ a_1+12d-5=2a_1+10d\end{cases},\ \begin{cases}4a_1=3d\\ a_1-2d+5=0\end{cases},\ \begin{cases}d=4\\ a_1=3\end{cases}.$$

466.

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=16\\ a_1-a_3=4\end{cases},\ \begin{cases}4a_1+6d=16\\ -2d=4\end{cases},\ \begin{cases}d=-2\\ a_1=7\end{cases}.$$

$a_1=7$, $a_2=5$, $a_3=3$, $a_4=1$.
Искомое число: 1357.

467.

$a_7=-100$, $a_9=-78$. Тогда $d=\dfrac{a_9-a_7}{2}=\dfrac{-78+100}{2}=11$

и $a_{15}=a_7+8D=-100+8\cdot 11=-12$.
Далее $a_1=a_7-6\cdot d=-100=6\cdot 11=-166$, $a_{20}=a_{15}+5d=-12+5\cdot 11=43$.

Так что $S_{20}=\dfrac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=\dfrac{-166+43}{2}\cdot 20=-1230$.

468.
a_k - число штрафных очков за k-й промах
$a_1=1$, $a_2=1,5$, $a_3=2$, ...

Известно, что $S_n=7$, тогда $\dfrac{2\cdot a_1+(n-1)}{2}\cdot n=7$,

$n\cdot(2+0,5(n-1))=14$,
$0,5n^2+1,5n-14=0$, $n^2+3n-28=0$, $n=4$ (так как $n>0$).
Так что стрелок совершил 4 промаха, а значит попал в цель 21 раз.

469.
a_k - число капель, принятых в k-1 день:
$a_1=5$, $a_2=10$, ... , $a_n=40$, $a_{n+1}=40$, $a_{n+2}=40$, $a_{n+3}=40$, $a_{n+4}=35$, $a_{n+5}=30$, ... , $a_m=5$.

$n=\frac{a_n-a_1}{5}+1=8.$

Тогда $a_1=5$, $a_2=10$, ... , $a_8=40$, $a_9=40$, $a_{10}=40$, $a_{11}=40$,
$a_{12}=35$, $a_{13}=30$, ... , $a_m=5$.

$m=11+\frac{a_m-a_{11}}{-5}$, $m=18$.

Тогда общее число капель
$S=a_1+a_2+ ... +a_8+3\cdot 40+a_{12}+ ... +a_{18}=$
$=2(a_1+ ... +a_7)+4\cdot 40=(a_1+a_7)\cdot 7+4\cdot 40=40\cdot 7+4\cdot 40=440.$
Так что больной надо купить 2 пузырька с каплями.

470.

a_k - количество сантиметров, пройденное за k-ю минуту.
$a_1=30$, $a_2=35$, $a_3=40$, ...

$S_n=525$, тогда $\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=525$,

$(60+5(n-1))\cdot n=1050$, $5n^2+55n-1050=0$, $n^2+11n-210=0$, $n=10$ (так как $n>0$).
Так что за 10 минут улитка достигнет вершины дерева.

471.

a_k - количество метров, пройденных за k-й день.
$a_1=1400$, $a_2=1300$, $a_3=1200$, ...

$S_n=5000$, тогда $\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=5000$,

$n(2800+(n-1)(-100))=10000$, $100n^2-2900n+10000=0$,
$n^2-29n+100=0$, $n=4$ (так как $4<25$).
Так что за 4 дня альпинисты покорили высоту.

472.

Пусть a_k - количество у.е., заплаченных за k-е кольцо, тогда:
$a_1=26$, $a_2=24$, $a_3=22$, ...

Общая сумма $S=S_n+40=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n+40=n(26-(n-1))+40=40+24n-n^2$.

По условию $\frac{S}{n}=22\frac{4}{9}$, $\frac{40+27n-n^2}{n}=22\frac{4}{9}$, $9n^2-243n-360=-202n$,

$9n^2-243n-360=-202n$, $9n^2-41n-360=0$, $n=9$ (так как $n>0$). Так что было установлено 9 колец.

473.

Если $x-4$, $\sqrt{x-3}$, $x-6$ образуют арифметическую прогрессию, то

$\frac{x-4+x-6}{2}=\sqrt{x-3}$, x-5=$\sqrt{x-3}$, x^2-10x+25=x-3, x^2-11x+28=0,

x=4 и x=7, но x-5>0, так что x=7.

474.

Если $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ образуют прогрессию, то

а) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{1}{b}$, $\frac{a+c}{2ac}=\frac{1}{b}$, ab+bc=2ac, ab+bc+ac;

б) ab+bc=2ac|:ac, $\frac{b}{c}+\frac{b}{a}$=2. Что и требовалось доказать.

475.

Если $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{c+b}$ - образуют арифметическую прогрессию,

то $\frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}}{2}=\frac{1}{a+c}$, $\frac{c+b+a+b}{2(a+b)(c+b)}=\frac{1}{a+c}$,

(2b+a+c)(a+c)=2(a+b)(b+c), 2ab+a^2+ac+2bc+ac+c^2=2ab+2ac+2b^2+2bc,

то есть $\frac{a^2+c^2}{2}$=b^2, так что a^2, b^2, c^2 - также образуют прогрессию, что и требовалось доказать.

§ 19. Геометрическая прогрессия

476

а) b_1=-1, b_2=-3, b_3=-9, b_4=-27, b_5=-81, b_6=-243;

б) b_1=-2, b_2=1, b_3=-$\frac{1}{2}$, b_4=$\frac{1}{4}$, b_5=-$\frac{1}{8}$, b_6=$\frac{1}{16}$;

в) b_1=-1, b_2=3, b_3=-9, b_4=27, b_5=-81, b_6=243;

г) b_1=20, b_2=20$\sqrt{5}$, b_3=100, b_4=100$\sqrt{5}$, b_5=500, b_6=500$\sqrt{5}$.

477.

b_1=3, b_2=3^2=9, b_3=3^3=27, ...

Это геометрическая прогрессия со знаменателем q=3.

478.

b_1=$\frac{1}{10}$, b_2=$\frac{1}{100}$, b_3=$\frac{1}{1000}$, ...

Это геометрическая прогрессия со знаменателем q=$\frac{1}{10}$.

479.

а), в) и г).

480.

а), в) и г).

481.

а) и г) - возрастающие, в) - убывающая.

482.

а) - возрастающая, б) - убывающая..

483.

а) $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $q=\frac{3}{4}$; в) $q=\frac{1}{3}$; г) $q=\frac{7}{2}$.

484.

а) $q=b_3:b_2=(-32):8=-4$; $b_1=b_2;q=-2$;

б) $q=b_5:b_4=(-\frac{1}{2}):1=-\frac{1}{2}$; $b_1=b_4;q^3=1:(-\frac{1}{2})^3=-8$;

в) $q=b_3:b_2=\frac{3}{4}:\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$; $b_1=b_2;q=3$;

г) $q=b_6:b_5=3:6=\frac{1}{2}$; $b_1=b_5;q^4=6:(\frac{1}{2})^4=96$.

485.

а) $b_4=b_1\cdot q^3=-2\cdot(-\frac{3}{2})^3=\frac{27}{4}$; б) $b_5=b_1\cdot q^4=\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2})^4=4\sqrt{6}$;

в) $b_4=b_1\cdot q^3=3\cdot(-\frac{3}{4})^3=-\frac{81}{64}$; г) $b_6=b_1\cdot q^5=5\sqrt{5}\cdot(5^{-\frac{1}{2}})^5=5^{-1}=\frac{1}{5}$.

486.

а) $b_n=5^{n-1}$, $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$, $b_1=1$, $q=5$;

б) $b_n=\frac{3}{5}\cdot 2^n$, $b_n=\frac{6}{5}\cdot 2^{n-1}$, $b_1=\frac{6}{5}$, $q=2$;

в) $b_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}$, $b_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q=\frac{1}{4}$;

г) $b_n=\frac{5}{2^{n+1}}$, $b_n=\frac{5}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}$, $b_1=\frac{5}{4}$, $q=\frac{1}{2}$.

487.

$b_1=18$, $b_3=2$, тогда $b_2^2=b_1\cdot b_3=36$ и так как $b_2>0$ (по условию), то $b_2=6$.

То есть 18, 6, 2.

488.

а) $b_n=5\cdot2^{n-1}$, $640=5\cdot2^{n-1}$, $2^{n-1}=128$, $n=7$, так что $A=640$ - член прогрессии;

б) $b_n=-\frac{7}{5}(\sqrt{3})^n$, $-37{,}8=-\frac{7}{5}(\sqrt{3})^n$, $(\sqrt{3})^n=27$, $n=6$, так что $A=-37{,}8$ - член прогрессии;

в) $b_n=-2\cdot5^{\frac{n}{2}}$, $-1250=-2\cdot5^{\frac{n}{2}}$, $5^{\frac{n}{2}}=625$, $n=8$, так что $A=b_8$ - член прогрессии;

г) $b_n=3{,}5(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+3}$, $-0{,}218=3{,}5\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+3}$, $(-\sqrt{2})^{-n-3}=\frac{0{,}436}{7}$, n - не является натуральным числом, так что A - не член прогрессии.

489.

а) $b_n=4\cdot3^{n-1}$, $b_n>324$ при $4\cdot3^{n-1}>324$, $3^{n-1}>81$, $n>5$, $n=6$;

б) $b_n=3{,}5\cdot(\sqrt{2})^{n-2}$, $b_n>14$ при $3{,}5\cdot(\sqrt{2})^{n-2}>14$, $(\sqrt{2})^{n-2}>4$, $n>6$, $n=7$;

в) $b_n=2\cdot5^{n-1}$, $b_4>253$ при $2\cdot5^{n-1}>253$, $5^{n-1}>\frac{253}{2}$, $n=5$;

г) $b_n=\frac{2}{5}(\sqrt{3})^{n+3}$, $b_n>84$ при $\frac{2}{5}(\sqrt{3})^{n+3}>210$, $n=7$.

490.

а) $b_n=3\cdot2^{n-1}$; б) $b_n=-2{,}5\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$; в) $b_n=2{,}5\cdot(-0{,}2)^{n-1}$; г) $b_n=3\sqrt{3}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$.

491.

а) $b_n=8\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$; б) $b_n=-\frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{4})^{n-1}=(-\frac{1}{4})^n$;

в) $b_n=4\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}$; г) $b_n=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^n$.

492.

а) $b_5=b_1\cdot q^4$;
б) $b_{41}=b_1\cdot q^{40}$;
в) $b_k=b_1\cdot q^{k-1}$;
г) $b_{2n}=b_1\cdot q^{2n-1}$.

493.

а) $b_4=b_1\cdot q^3=128\cdot(-\frac{1}{2})^3=-16$; б) $b_5=b_1\cdot q^4=270\cdot(\frac{1}{3})^4=\frac{10}{3}$;

в) $b_8=b_1\cdot q^7=\frac{1}{5}\cdot(\sqrt{5})^7=25\sqrt{5}$; г) $b_6=b_1\cdot q^5=625\cdot(-\frac{1}{5})^5=-\frac{1}{5}$.

494.

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$:

а) $b_{10}=b_1\cdot q^9=1\cdot 3^9=3^9$; б) $b_6=b_1\cdot q^5=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{3})^5=-\frac{1}{486}$;

в) $b_5=b_1\cdot q^4=8\cdot\frac{1}{2}{}^4=\frac{1}{2}$; г) $b_5=b_1\cdot q^4=2{,}5\cdot(1{,}5)^4=\frac{405}{32}$.

495.

а) $\frac{1}{729}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$, $\frac{1}{729}=(\frac{1}{3})^n$, $n=6$;

б) $2=256\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$, $(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{128}$, $n=8$;

в) $4\cdot 10^{-3}=2{,}5\cdot(\frac{1}{5})^{n-1}$, $\frac{1}{625}=(\frac{1}{5})^{n-1}$, $n=5$;

г) $-2401=\frac{1}{343}\cdot(-7)^{n-1}$, $(-7)^{n-1}=-823543$, $n=8$.

496.

а) $b_n=3^{n-1}$, $3^{n-1}<729$ при $n\le 7$, $n=1, 2, \ldots, 6, 7$;

б) $b_n=3\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$, $3(\frac{1}{2})^{n-1}<0{,}003$ при $(\frac{1}{2})^{n-1}<0{,}001$, $n>10$, $n=11, 12, 13\ldots$;

в) $b_n=243\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$, $243(\frac{1}{3})^{n-1}<0{,}1$ при $(\frac{1}{3})^{n-1}<\frac{0{,}1}{243}$, $n>8$, $n=9, 10, 11\ldots$;

г) $b_n=16\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$, $16(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}<1$ при $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}<\frac{1}{2^4}$, $n>9$, $n=10, 11\ldots$.

497.

а) $q^2=\frac{b_7}{b_5}=\frac{192}{48}=4$, $q>0$, так что $q=2$ и $b_1=b_5:q^4=48:16=3$;

б) $q^3=b_5:b_2=\frac{81}{24}=\frac{27}{8}$, $q=\frac{3}{2}$ и $b_1=b_2:q=24:\frac{3}{2}=16$;

в) $q^3=b_6:b_3=-\frac{13}{32}:\frac{13}{4}=-\frac{1}{8}$, $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=b_3:q^2=\frac{13}{4}:\frac{1}{4}=13$;

г) $q^2=b_5:b_3=48:12=4$, $q<0$, так что $q=-2$ и $b_1=b_3:q^2=12:4=3$.

498.

$b_1=1$, $b_4=\frac{1}{8}$, тогда $q=\sqrt[3]{b_4:b_1}=\frac{1}{2}$ и $b_2=\frac{1}{2}$, $b_3=\frac{1}{4}$. То есть 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.

499.

P_k - периметр k-го вписанного треугольника

$P_1=3\cdot 32=96$, $P_2=3\cdot\frac{32}{2}=48$, $P_3=24$, ...

Так что P_1, P_2, P_3 ... - геометрическая прогрессия.

$P_n=96\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$.

500.

$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$:

а) $S_4=\frac{1(2^4-1)}{2-1}=15$; б) $S_4=\frac{3(4^4-1)}{4-1}=255$;

в) $S_4=\frac{1((\frac{1}{3})^4-1)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{80}{81}=\frac{40}{27}$; г) $S_4=\frac{4\cdot((-\frac{1}{2})^4-1)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{4\cdot 2\cdot 15}{3\cdot 16}=\frac{5}{2}$.

501.

а) $S_6=\frac{18\cdot((\frac{1}{3})^6-1)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{18\cdot 3\cdot 728}{2\cdot 729}=\frac{728}{27}$;

б) $S_6=\frac{15\cdot((\frac{2}{3})^6-1)}{\frac{2}{3}-1}=\frac{15\cdot 3\cdot 665}{729}=\frac{3325}{81}$;

в) $S_6=\frac{-12\cdot((-\frac{1}{2})^6-1)}{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{12\cdot 2\cdot 63}{3\cdot 64}=-\frac{63}{8}$;

г) $S_6=\frac{-9\cdot((\sqrt{3})^6-1)}{\sqrt{3}-1}=-\frac{234}{\sqrt{3}-1}$.

502.

а) $S_6=\frac{5(2^6-1)}{2-1}=315$; б) $S_8=\frac{-1((-1{,}5)^8-1)}{-1{,}5-1}=\frac{1261}{128}$;

в) $S_{13}=\frac{-4((\frac{1}{2})^{13}-1)}{\frac{1}{2}-1}=-\frac{8191}{1024}$; г) $S_8=\frac{4{,}5((\frac{1}{3})^8-1)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{1640}{243}$.

503.

а) b_1=3, q=2, $S_5=\frac{3(2^5-1)}{2-1}$=93;

б) b_1=-1, q=-2, $S_5=\frac{-1((-2)^5-1)}{-2-1}$=-11;

в) b_1=-3, $q=\frac{1}{2}$, $S_5=\frac{-3((\frac{1}{2})^5-1)}{\frac{1}{2}-1}=-\frac{93}{16}$;

г) $b_1=\sqrt{2}$, q=3, $S_5=\frac{\sqrt{2}(3^5-1)}{3-1}=121\sqrt{2}$.

504.

а) $q=b_5:b_4$=320:160=2, $b_1=b_4:q^3$=160:8=20, $S_5=\frac{20(2^5-1)}{2-1}$=620;

б) $q=\sqrt{b_9:b_7}=\sqrt{16:8}=\sqrt{2}$, $b_1=b_7:q^6=8:2^3=1$,

$S_5=\frac{1((\sqrt{2})^5-1)}{\sqrt{2}-1}=(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=7+3\sqrt{2}$; опечатка в ответе задачника.

в) $q=\sqrt{b_5:b_3}=\sqrt{\frac{1}{9}:1}=\frac{1}{3}$, $b_1=b_3:q^2=1:(\frac{1}{3})^2=9$,

$S_5=\frac{9\cdot((\frac{1}{3})^5-1)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{9\cdot3\cdot242}{2\cdot243}=\frac{121}{9}$;

г) $q=\sqrt[3]{b_7:b_4}=\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, $b_1=b_4:q^3=3\sqrt{3}:3\sqrt{3}=1$,

$S_5=\frac{1((\sqrt{3})^5-1)}{\sqrt{3}-1}=\frac{(9\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}=13+4\sqrt{3}$.

505.

b_1	q	n	b_n	S_n
15	$\frac{1}{3}$	3	$1\frac{2}{3}$	$21\frac{2}{3}$
$16-3\sqrt{23}$	$\frac{9+3\sqrt{23}}{7}$	3	18	25

$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	6	$2\frac{17}{32}$	$6\frac{89}{96}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	4	9	$4(3+\sqrt{3})$
15	$\frac{1}{3}$	6	$\frac{5}{81}$	$22\frac{38}{81}$

b_1	q	n	b_n	S_n
$\frac{15}{169}$	$\frac{13}{5}$	4	$\frac{39}{25}$	$\frac{10476}{4225}$
$2\sqrt{6}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{7(\sqrt{6}+1)}{3}$

506.

а) $b_4=\sqrt{b_3\cdot b_5}=\sqrt{36\cdot 49}=42$; б) $b_4=-\sqrt{b_3\cdot b_5}=-\sqrt{36\cdot 49}=-42$;

в) $b_8=\sqrt{b_7\cdot b_9}=\sqrt{16\cdot 25}=20$; г) $b_8=-\sqrt{b_7\cdot b_9}=-\sqrt{16\cdot 25}=-20$.

507.

а) $b_3=\sqrt{b_4\cdot b_2}=\sqrt{16\cdot 4}=8$; $q=b_3:b_2=8:4=2$;

б) $b_6=-\sqrt{b_5\cdot b_7}=-\sqrt{3\cdot 12}=-6$; $q=b_6:b_5=-6:12=-\frac{1}{2}$;

в) $b_{26}=-\sqrt{b_{25}\cdot b_{27}}=-\sqrt{7\cdot 21}=-7\sqrt{3}$; $q=b_{26}:b_{25}=-\sqrt{3}$;

г) $b_7=\sqrt{b_6\cdot b_8}=\sqrt{15\cdot 5}=5\sqrt{3}$; $q=b_8:b_7=5:5\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. опечатка в ответе задачника.

508.

Если t, 4t, 8 - члены прогрессии, то

$t\cdot 8=(4t)^2$, так что $t=\frac{1}{2}$.

509.

Если -81, 3y, -1 - члены прогрессии, то $(-81)\cdot(-1)=(3y)^2$, откуда $y=\pm 3$.

510.

Если $x-1$, $\sqrt{3x}$, $6x$ - члены прогрессии, то

$(x-1)6x=(\sqrt{3x})^2$, $(x-1)\cdot 6=3$, $x=\frac{3}{2}$.

511.

а) $b_1=\frac{6}{5}$, q=3; б) b_1=0,3, q=(-$\frac{1}{5}$);

в) $b_1=\frac{5}{2}$, q=$\frac{1}{2}$; г) b_1=-$\frac{4}{7}$, q=2.

512.

$b_1=4$, $b_3+b_5=80$, $q>1$, тогда $b_3+b_5=b_1(q^2+q^4)=80$,
то есть $q^2+q^4=20$, так что q=2 и $b_{10}=b_1\cdot q^9=4\cdot 2^9=2^{11}=2048$.

513.

$b_1=1$, $b_5=81$, тогда $q^4=b_5\cdot b_1=81$, $q=\pm 3$, так что $b_2=\pm 3$, $b_3=9$, $b_4=\pm 2\cdot 7$.
То есть 1, 3, 9, 27, 81 или 1, -3, 9, -27, 81.

514.

$\begin{cases} b_2-b_3=18 \\ b_2+b_3=54 \end{cases}$, тогда $b_2=36$, $b_3=18$, $q=b_3:b_2=\frac{1}{2}$ и $b_1=b_2:q=72$.

515.

$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=14 \\ b_4+b_5+b_6=112 \end{cases}$, $\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=14 \\ b_1q^3(1+q+q^2)=112 \end{cases}$, $q^3=8$, q=2, $b_1=2$.
Так что прогрессия: 2, 4, 8, 16, 32, 64.

516.

$\begin{cases} b_1\cdot b_2\cdot b_3=216 \\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}=\sqrt{364} \end{cases}$, $b_1>0$, $b_2>0$, $b_3>0$.

Тогда $\begin{cases} b_1^3q^3=216 \\ b_1\sqrt{1+q^2+q^4}=\sqrt{364} \end{cases}$, $\begin{cases} b_1\cdot q=6 \\ b_1\sqrt{1+q^2+q^4}=2\sqrt{91} \end{cases}$,
$b_1=2$, q=3, $b_2=6$, $b_3=18$.

517.

$S_6^*=b_1^2+b_2^2+...+b_6^2=b_1^2\,(1+q^2+q^4+q^6+q^8+q^{10})=\frac{b_1^2(q^{12}-1)}{q^2-1}$:

а) $S_6^*=\frac{9(64-1)}{1}$=567; б) $S_6^*=\frac{5(46656-1)}{5}$=46655;

в) $S_6^*=\frac{243(\frac{1}{729}-1)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{729\cdot 728}{2\cdot 729}$=364;

г) $S_6^* = \dfrac{12(\frac{1}{64}-1)}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{24\cdot 63}{64} = \dfrac{189}{8}$.

518.

$S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, $q^n = \dfrac{S_n(q-1)}{b_1} + 1$:

а) $3^n = \dfrac{200(3-1)}{5} + 1$, $3^n = 81$, $n=4$;

б) $(\frac{1}{2})^n = \dfrac{-127\cdot(\frac{1}{2}-1)}{64\cdot(-1)} + 1$, $(\frac{1}{2})^n = \dfrac{1}{128}$, $n=7$;

в) $2^n = \dfrac{189\cdot(2-1)}{3} + 1$, $2^n = 64$, $n=6$;

г) $(\frac{1}{3})^n = \dfrac{121\cdot(\frac{1}{3}-1)}{27\cdot 3} + 1$, $(\frac{1}{3})^n = \dfrac{1}{243}$, $n=5$.

519.

а) $1+2+2^2+ \ldots +2^8 = S_9 = \dfrac{b_1(q^9-1)}{q-1} = \dfrac{1\cdot((2^9-1)}{2-1} = 511$;

б) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^{10}} = S_{11} = \dfrac{b_1(q^{11}-1)}{q-1} = \dfrac{1\cdot(-\frac{1}{2})^{11}-1)}{-\frac{1}{2}-1} = \dfrac{2049\cdot 2}{3\cdot 2048} = \dfrac{683}{1024}$;

в) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+ \ldots +\dfrac{1}{3^6} = S_6 = \dfrac{b_1(q^6-1)}{q-1} = \dfrac{1\cdot((\frac{1}{3})^6-1)}{3(\frac{1}{3}-1)} = \dfrac{728\cdot 3}{3\cdot 729\cdot 2} = \dfrac{364}{729}$;

г) $1-3+3^2-3^3+ \ldots -3^9 = S_{10} = \dfrac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = \dfrac{1\cdot((-3)^{10}-1)}{-3-1} = \dfrac{3^{10}-1}{-4} = -14762$.

520.

а) $1+x+x^2+ \ldots +x^{100} = S_{101} = \dfrac{b_1(q^{101}-1)}{q-1} = \dfrac{1(x^{101}-1)}{x-1} = \dfrac{x^{101}-1}{x-1}$;

б) $x+x^3+x^5+ \ldots +x^{35} = S_{18} = \dfrac{b_1(q^{18}-1)}{q-1} = \dfrac{x(x^{36}-1)}{x^2-1}$;

в) $x^2-x^4+x^6- \ldots -x^{20} = S_{10} = \dfrac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = \dfrac{x^2(x^{20}-1)}{-x^2-1} = \dfrac{x^2(1-x^{20})}{1+x^2}$;

г) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^{40}}$ =S$_{40}$=$\frac{b_1(q^{40}-1)}{q-1}=\frac{1((\frac{1}{x})^{40}-1)}{x\cdot(\frac{1}{x}-1)}=\frac{1-x^{40}}{x^{40}(1-x)}$.

521.

а) 1+x+x^2+x^3=S$_4$=$\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{1(x^4-1)}{x-1}=\frac{x^4-1}{x-1}$, ч.т.д.;

б) 1+x+x^4+x^6=S$_4$=$\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{1(x^8-1)}{x^2-1}=\frac{x^8-1}{x^2-1}$, ч.т.д.;

в) 1-x+x^2-x^3=S$_4$=$\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{1((-x)^4-1)}{-x-1}=\frac{1-x^4}{1+x}$, ч.т.д.;

г) 1-x^2+x^4-x^6=S$_4$=$\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{1((-x^2)^4-1)}{-x^2-1}=\frac{1-x^8}{x^2+1}$, ч.т.д.;

522.

а) (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)·S$_5$=(x-1)·$\frac{1(x^5-1)}{x-1}$ =x^5-1, ч.т.д.;

б) (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=(x+1)·S$_5$=(x+1)·$\frac{1\cdot((-x^5)-1)}{-x-1}$ =x^5+1, ч.т.д.;

в) (x^2+1)(x^6-x^4+x^2-1)=(x^2+1)·S$_4$=(x^2+1)·$\frac{-1((-x^2)^4-1)}{-x^2-1}$ =x^8-1,

значит утверждение x^8+1=(x^2+1)(x^6-x^4+x^2-1) - неверно.

г)) (1-x^2)(x^4+x^2+1)=(1-x^2)·S$_3$=(1-x^2)·$\frac{1((x^2)^3-1)}{x^2-1}$ =1-x^6, ч.т.д.;

523.

Дана прогрессия b, b$_2$, ... , b$_{2n}$.

Тогда $\frac{b_2+b_4+...+b_{2n}}{b_1+b_3+...+b_{2n-1}}=\frac{q(b_1+...+b_{2n-1})}{b_1+...+b_{2n-1}}$ =q, ч.т.д.;

524.

b$_k$ - число бактерий после 20·k-минут

$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=4,...,\ b_k=2^{k-1}$

Тогда в сутках 20·3·24 - минут, то есть 20·k,

где k=72 и S$_k$=$\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(2^{72}-1)}{2-1}$ =2^{72}–1.

525.

b_k - количество денег, отданных богачом в k-й день (копеек).
Тогда $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=4$,... $b_{30}=2^{29}$.

Тогда богач отдал $S_{30}=\frac{b_1(q^{30}-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(2^{30}-1)}{2-1}=2^{30}-1$ копеек

≈ 1070000000 коп.≈ 10 млн. руб.

А получил богач $S=30\cdot 100000=3000000=3$ млн. руб.
Так что богач проиграл.

526.

$b_1, \dots, b_n$ - геометрическая прогрессия.
Тогда $b_k\cdot b_{n-k+1}=(b_1\cdot q^{k-1})\cdot(b_n:q^{n-(n-k+1)}=b_1\cdot b_n$ - что и требовалось доказать.

527.

b_1, b_2, b_3 - геометрическая прогрессия.
$b_1=9$, b_1 b_2 ,b_3-16 - арифметическая прогрессия.

Тогда $b_1\cdot b_3=b_2^2$, то есть $9b_3=b_2^2$ и $\frac{b_1+b_9-16}{2}=b_2$, то есть $b_2=\frac{b_3-7}{2}$.

Так что $9b_3=(\frac{b_3-7}{2})^2$, $36b_3=b_3^2-14b_3+49$,

$b_3^2-50b_3+49=0$, $b_3=1$ или $b_3=49$.

Тогда $b_2=-3$ или $b_2=21$.

528.

$a_1+a_2+a_3=24$, a_1, a_2, a_3 - арифметическая прогрессия.
a_1, a_2+1, a_3+14 - геометрическая прогрессия.
Тогда поскольку $a_1+a_3=2a_2$, то $3a_2=24$, $a_2=8$.
Далее, $a_1+a_3=16$ и $a_1(a_3+14)=(a_2+1)^2=81$.

$\begin{cases} a_1+a_3=16 \\ a_1(a_3+14)=81 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1=16-a_3 \\ (16-a_3)(a_3+14)=81 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1=16-a_3 \\ a_3^2-2a_3-143=0 \end{cases}$,

$\begin{cases} a_1=16-a_3 \\ a_3=13 \text{ или } a_3=-11 \end{cases}$, $\begin{cases} a_3=13 \\ a_1=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a_3=-11 \\ a_1=27 \end{cases}$.

Так что 27, 8, -11 или 3, 8, 13.

529.

$b_1, b_2, b_3, \dots$ - геометрическая прогрессия.
$b_1+b_2+b_3=91$, b_1+25, b_2+27, b_3+1 - арифметическая прогрессия.
Тогда $b_1+25+b_3+1=2(b_2+27)$, причем $b_1+25>b_2+27>b_3+1$.
Тогда $3b_2+28=91$, $b_2=21$.

Так что $b_1+b_3=70$ и $b_1b_3=b_2^2=441$, так что $b_1=7$, $b_3=63$ или $b_2=7$, $b_1=63$.

Так как $b_1+25>b_3+1$, то $b_1=63$, а $b_3=7$.

Тогда $q=b_2:b_1=\frac{1}{3}$. и $b_7=b_1\cdot q^6=63\cdot\frac{1}{3^6}=\frac{7}{81}$.

530.

b_1, b_2, b_3 - геометрическая прогрессия.

$b_1=a_1$, $b_2=a_2$, $b_3=a_7$, где a_1, a_2, ... , a_7 - арифметическая прогрессия.

$b_1+b_2+b_3=31$. Тогда $b_1(1+q+q^2)=31$.

$d=a_2-a_1=b_2-b_1$, $a_7=a_1+6d$, то есть

$b_3=b_1+6(b_2-b_1)$, $b_3=6b_2-5b_1$, $b_1(5-6q+q^2)=0$.

Тогда $5-6q+q^2=0$, $q=1$ или $q=5$.

Тогда $b_1=\frac{31}{1+q+q^2}$, $b_1=\frac{31}{3}$ или $b_1=1$.

Тогда $b_2=b_3=\frac{31}{3}$ или $b_2=5$, $b_3=25$.

Ответ: 1, 5, 25 или $\frac{31}{3}$, $\frac{31}{3}$, $\frac{31}{3}$.

Глава 5. Элементы теории тригонометрических функций

§ 21. Числовая окружность.

531.
Смотри рис. 1:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

532.
Смотри рис. 2:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

533.
Смотри рис. 3:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

534.
Смотри рис. 4:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

535.
Смотри рис. 5:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

536.
Смотри рис. 6:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

537.
Смотри рис. 7:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

538.
Смотри рис. 8:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

539.
Смотри рис. 9:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

540.
а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{12}$; г) $\frac{5\pi}{6}$.

рис. 1

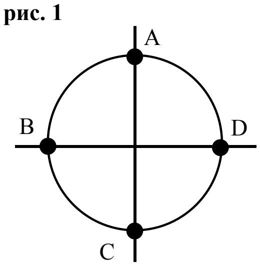


рис. 2

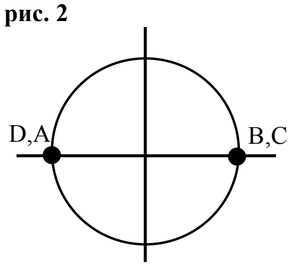


рис. 3

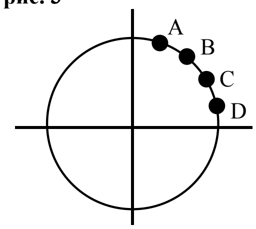


рис. 4

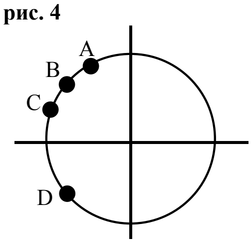


рис. 5

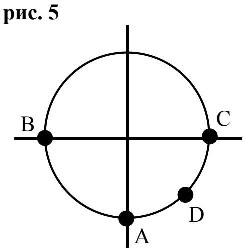


рис. 6

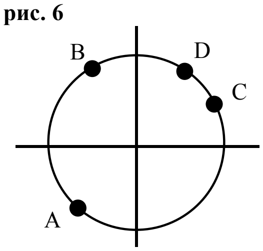


рис. 7

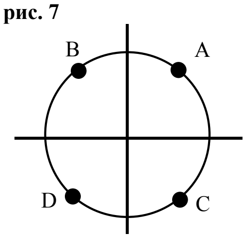


рис. 8

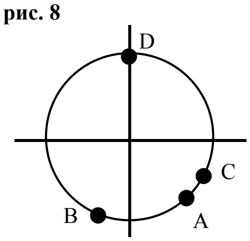
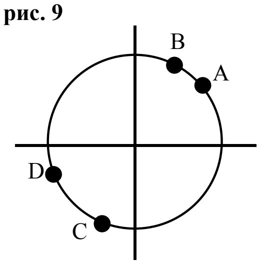


рис. 9



540.

а) Длина $AM = \frac{3\pi}{4}$;

б) Длина $BK = \frac{2\pi}{3}$;

в) Длина $MP = \frac{7\pi}{12}$;

г) Длина $KA = \frac{5\pi}{6}$.

541.

а) Длина $AM = \frac{\pi}{4}$;

б) Длина $CK = \frac{2\pi}{3}$;

в) Длина $MP = \frac{19\pi}{12}$;

г) Длина $PC = \frac{7\pi}{6}$.

542.

а) Нет, не совпадают, так как $12\frac{1}{3}\pi \neq \frac{31\pi}{3} + 2\pi n$,

n – целое.

б) Нет, не совпадают, так как $8\frac{1}{6}\pi \neq \frac{19\pi}{6} + 2\pi n$, n ∈ Z.

в) Да, совпадают, так как $12\frac{1}{4}\pi = \frac{9}{4}\pi + 10\pi$.

г) Нет, не совпадают., так как $19\frac{3}{4}\pi \neq 6{,}75\pi + 2\pi n$

543.

а) Симметрично относительно *OX* (диаметра, проходящего через точку *O*).
б) Совпадают.
в) Симметрично относительно центра.
г) Совпадают.

544.

а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi r$, $r \in$ Z.

б) 5 + 2πn , n ∈ Z.

в) $\frac{3\pi}{4}+2\pi l$, $l \in Z$.

г)$-3 + 2\pi k$,$k \in Z$.

545.

а) Да, можно.

б) Да, можно.

в) Да, можно ($6{,}2 < 2\pi$).

г) Нет, нельзя ($6{,}3 > 2\pi$).

546.

а) $\frac{23\pi}{12}$. б) $\frac{\pi}{12}$.

в) $\frac{\pi}{12}$.   г) $\frac{23\pi}{12}$.

547.

а) $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$.   б) $\frac{3\pi}{10}$.

в) $\frac{9\pi}{5}$.   г) $\frac{17\pi}{10}$.

548.

а) $\frac{\pi}{12}$.   б) $\frac{19\pi}{12}$.

в) $\frac{23\pi}{12}$. г) $\frac{5\pi}{12}$.

549.

а) 2π , -2π;   б) $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$;

в) π, $-\pi$;   г) $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$;

550.

а) $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$;   б) $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$ (в ответе задачника ошибка).

в) $\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$.   г) $\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$.

551.

а) $\frac{\pi}{3}$,   б) $\frac{\pi}{2}$, в) $\frac{7\pi}{6}$,   г) $\frac{\pi}{3}$.

552.

а) $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$. В четвертой.

б) $-\frac{3\pi}{2} < -5 < -2\pi$. В первой.

в) $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$. Во второй.

г) $-2\pi < -6 < -\frac{3\pi}{2}$. В первой.

553.

а) $\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi$. Во второй.

б) $5\pi < 17 < \frac{11\pi}{2}$. В третьей.

в) $\frac{19\pi}{2} < 31 < 10\pi$. В четвертой.

г) $30\pi < 95 < \frac{61\pi}{2}$. В первой.

§ 22. Числовая окружность в координатной плоскости

554.

а) M_1 $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

б) M_2 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

в) M_3 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

г) M_4 $(0; 1)$.

555.

а) M_1 $(0;1)$.
б) M_2 $(0; -1)$.
в) M_3 $(0; 1)$.
г) M_4 $(0; -1)$.

556.

а) M_1 (1; 0).
б) M_2 (–1; 0).
в) M_3 (1; 0).
г) M_4 (1; 0).

557.

а) M_1 (1; 0).
б) M_2 (0; 1).
в) M_3 (–1; 0).
г) M_4 (0; 1).

558.

а) $M_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

б) $M_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

в) $M_3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

г) $M_4 \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

559.

а) $M_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

б) $M_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

в) $M_3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

г) $M_4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

560.

а) $2\pi; -2\pi;$

б) $\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$.

в) $\pi; -\pi$.

г) $\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$.

561.

а) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$.

б) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$.

в) πk, $k \in Z$.

г) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

562.

а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

б) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$.

в) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$.

г) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$.

563.

а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$.

б) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

в) $2\pi k$, $k \in Z$.

г) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$.

564.

а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$.

б) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

в) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$.

г) $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

565.

а) $|0,7| < 1$. Да, имеется.

б) $\left|\frac{\pi}{3}\right| > 1$. Нет, не имеется.

в) $\left|\frac{\pi}{4}\right| < 1$. Да, имеется.

г) $|1{,}2| > 1$. Нет, не имеется.

566.

а) M ($\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$).

б) M ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

в) M ($\frac{-\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$)

г) M ($\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

567.

а) M ($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$);

б) M ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$);

в) M ($\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$);

г) M ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$).

568.

а) $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$.

б) $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

в) $\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$.

г) $\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$.

569.

а) $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6}$.

б) $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$.

в) $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$.

г) $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

570.

а) $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$. б) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $k \in Z$.

в) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; $k \in Z$. г) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

571.

а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$.

б) $\frac{4\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

в) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$.

г) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

572.

а) $x < 0$, $y > 0$. б) $x < 0$, $y < 0$.
в) $x > 0$, $y > 0$. г) $x > 0$, $y < 0$.

573.

а) $x > 0$, $y < 0$.
б) $x < 0$, $y > 0$.
в) $x > 0$, $y < 0$.
г) $x < 0$, $y < 0$.

§ 23. Синус и косинус. Тангенс и котангенс

574.

а) $\sin t = 0$, $\cos t = 1$.
б) $\sin t = 1$, $\cos t = 0$.
в) $\sin t = -1$, $\cos t = 0$.
г) $\sin t = -0$, $\cos t = -1$.

575.

а) $\sin t = 0$, $\cos = 1$.
б) $\sin t = -1$, $\cos t = 0$.
в) $\sin t = 1$, $\cos t = 0$.

г) $sin\ t = 0$, $cos\ t = -1$.

576.

а) $sin\ t = \frac{1}{2}$; $cos\ t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) $sin\ t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ t = -\frac{1}{2}$.

в) $sin\ t = \frac{1}{2}$; $cos\ t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

г) $sin\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ t = \frac{1}{2}$.

577.

а) $sin\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $sin\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) $sin\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

г) $sin\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

578.

а) "+".
б) "–".
в) "–".
г) "–".

579.

а) "–".
б) "–".
в) "–".
г) "+".

580.

а) $sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{2}$.

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1+1+1=1$.

581.

а) $2\sin 0 + 3\cos\frac{\pi}{2} - 4\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 0 - 4 = -4$.

б) $3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2\cos(-\pi) - 5\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$.

582.

а) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

б) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

583.

$\sin t = \frac{3}{5}$

а) $\sin(t + 2\pi) = \sin t = \frac{3}{5}$.

б) $\sin(t - \pi) = -\sin t = -\frac{3}{5}$.

в) $\sin(t - 2\pi) = \sin t = \frac{3}{5}$.

г) $\sin(t + \pi) = -\sin t = -\frac{3}{5}$.

584.

$\cos t = -\frac{4}{5}$

а) $\cos(t + 2\pi) = \cos t = -\frac{4}{5}$.

б) $\cos(t - \pi) = -\cos t = \frac{4}{5}$.

в) $\cos(t - 2\pi) = \cos t = -\frac{4}{5}$.

г) $\cos(t + \pi) = -\cos t = \frac{4}{5}$.

585.

а) $tg\frac{5\pi}{4} = +1$.

б) $tg\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

в) $tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

г) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

586.

а) $ctg\frac{4\pi}{3}=+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) $\mathrm{ctg}\ 0$ – не существует.

в) $ctg\frac{7\pi}{4}=-1$. г) $ctg\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

587.

а) $tg\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.б) $ctg\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=1$.

в) $ctg\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$. г) $tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

588.

а) $tg\frac{\pi}{4}+ctg\frac{5\pi}{4}=1+1=2$.

б) $ctg\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$.

в) $tg\frac{\pi}{6}-ctg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

г) $tg\frac{9\pi}{4}+ctg\frac{\pi}{4}=1+1=2$.

589.

а) $tg\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{\pi}{6}=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$.

б) $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}tg\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

в) $2\sin\pi+3\cos\pi+ctg\frac{\pi}{2}=0-3+0=-3$.

г) $2tg0+8\cos\frac{3\pi}{2}-6\sin\frac{\pi}{3}=0+0-6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3}$.

590.

а) $tg\frac{\pi}{5}\cdot ctg\frac{\pi}{5}=1$. б) $-4\text{tg }2{,}3\cdot\text{ctg }2{,}3=-4$.

в) $3tg\frac{\pi}{7}\cdot ctg\frac{\pi}{7}=3$. г) $7tg\frac{\pi}{12}\cdot ctg\frac{\pi}{12}=7$.

591.

$tgt=\frac{3}{4}$.

а) $tg(t+\pi)=tg\,t=\frac{3}{4}$. б) $tg(t-\pi)=tg\,t=\frac{3}{4}$.

в) $tg(t-4\pi)=tg\,t=\frac{3}{4}$. г) $tg(t+2\pi)=tg\,t=\frac{3}{4}$.

592.

а) $sin\ t=0$

$t=\pi k,\ k\in Z$.

б) $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $t=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) $\sin t=1$. $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

г) $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

593.

а) $\sin t=-1$

$t=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

б) $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. $t=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) $\sin t=-0{,}5$. $t=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

г) $\sin=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. $t=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

594.

а) $\cos t=0$; $t=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

б) $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) $\cos t = \frac{1}{2}$; $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

г) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $t = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

595.

а) $\cos t = -0{,}5$; $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$

б) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

в) $\cos t = -1$; $t = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

г) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

596.

а) "+".
б) "–".
в) "+".
г) "–".

597.

а) "–".
б) "–".
в) "–".
г) "–".

598.

а) "–".
б) "+".
в) "+".
г) "+".

599.

Выражение имеет смысл только тогда, когда подкоренное выражение неотрицательно.
а) $sin\ 11{,}2\pi < 0$.
Нет, не имеет.
б) $cos\ 1{,}3\pi < 0$.
Нет, не имеет.
в) $sin\ (-3{,}4\pi) > 0$.
Да, имеет.
г) $cos\ (-6{,}9\pi) < 0$.

Нет, не имеет.

600.

$$\sin^2(1{,}5+2\pi k)+\cos^2 1{,}5+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sin^2(1{,}5)+\cos^2(1{,}5)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=1\ .$$

601.

$$\cos 1+\cos(1+\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{6}=\cos 1-\cos 1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0\ .$$

602.

$$\sin 2+\sin(2+\pi)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\frac{\pi}{12}=$$

$$=\sin 2-\sin 2+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\frac{\pi}{12}=1\ .$$

603.

$$tg 2{,}5\cdot ctg 2{,}5+\cos^2\pi-\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}=1+1-1=1\ .$$

604.

а) $a=\sin\frac{7\pi}{10}, b=\sin\frac{5\pi}{6}$,

$a>b$, так как $\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{10}<\frac{5\pi}{6}<\pi$, а функция $\sin x$ – убывает на $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

б) $a=\cos 2$, $b=\sin 2$.

$a<b$, так как $a<0$, $b>0$.

в) $a=\cos\frac{\pi}{8},\ b=\cos\frac{\pi}{3}$

$a>b$, так как $\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{3}$, а функция $\cos x$ убывает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

г) $a=\sin 1,\ b=\cos 1$.

$b=\cos 1=\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, $a>b$, так как $\frac{\pi}{2}-1<1$, а функция

$y=\sin x$ – возрастает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ, приведенный в задачнике, не верен.

605.

а) $\sin\frac{4\pi}{3}, \sin\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{7}, \ \sin\frac{\pi}{5}, \ \sin\frac{2\pi}{3}$.

б) $\cos\frac{5\pi}{6}, \ \cos\frac{5\pi}{4}, \ \cos\frac{7\pi}{4}, \ \cos\frac{\pi}{3}, \ \cos\frac{\pi}{8}$.

606.

а) $\cos\frac{5\pi}{9} - tg\frac{25\pi}{18} = \cos\frac{5\pi}{9} - tg\frac{7\pi}{18}$,

$\cos\frac{5\pi}{9} < 0, \ \ tg\frac{7\pi}{18} > 0$, значит наше выражение имеет знак "–".

б) $tg1 - \cos 2$

$tg1 > 0, \ \ \cos 2 < 0$, значит наше выражение имеет знак "+".

в) $\sin\frac{7\pi}{10} - ctg\frac{3\pi}{5}$,

$\sin\frac{7\pi}{10} > 0, \ \ ctg\frac{3\pi}{5} < 0$, значит выражение имеет знак "+".

г) $\sin 2 - ctg\,5{,}5$ $\sin 2 > 0$, $ctg\,5{,}5 < 0$, значит выражение имеет знак "+".

607.

а) $sin1 \cdot cos\,2 \cdot tg\,3 \cdot ctg\,4$

$sin1 > 0$, $cos\,2 < 0$, $tg\,3 < 0$, $ctg4 > 0$.

Выражение имеет знак "+".

б) $sin(-5) \cdot cos(-6) \cdot tg(-7) \cdot ctg(-8)$,

$sin(-5) > 0$, $cos(-6) > 0$, $tg(-7) < 0$, $ctg(-8) > 0$.

Выражение имеет знак "–".

608.

а) $\sqrt{40}\sin t = \sqrt{10}$.

$\sin t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) $2\sin t - \sqrt{3} = 0$

$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. $t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

в) $6\sin t + \sqrt{27} = 0$.

$6\sin t = -3\sqrt{3}$; $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. $t = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

г) $2sin\ t + 1 = 0$

$sin\ t = -\frac{1}{2}$; $t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in$ Z.; $t = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in$ Z.

609.

а) $\sqrt{50}\cos t = 5$

$\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $t = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in$ Z.

б) $2\cos t + \sqrt{3} = 0$

$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in$ Z.

в) $4\cos = \sqrt{12}$

$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in$ Z.

г) $2\ cos\ t - 1 = 0$.

$\cos t = \frac{1}{2}$; $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in$ Z.

§ 24. Тригонометрические функции числового аргумента

610.

а) $1 - sin^2\ t = cos^2\ t$. б) $cos^2 t - 1 = -\ sin^2 t$.

в) $1 - cos^2 t = sin^2 t$. г) $sin^2 t - 1 = -\ cos^2 t$.

611.

а) $(1 - sin\ t)(1 + sin\ t) = 1 - sin^2 t = cos^2 t$.

б) $cos^2 t + (1 - sin^2 t) = 2cos^2 t$.

в) $(1 - cos\ t)(1 + cos\ t) = 1 - cos^2 t = sin^2 t$.

г) $sin^2 t + 2cos^2 t - 1 = 1 + cos^2 t - 1 = cos^2 t$.

612.

а) $sin^2 t + cos^2 t + 1 = 2$.

б) $1 - sin^2 t + cos^2 t = 2cos^2 t$.

в) $cos^2 t - (1 - 2sin^2 t) = cos^2 t + sin^2 t - 1 + sin^2 t = sin^2 t$.

г) $1 - (cos^2 t - sin^2 t) = sin^2 t + sin^2 t = 2sin^2 t$.

613.

а) $\frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} = tg^2 t$.

б) $\frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = 1$, $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in$ Z.

в) $1-\dfrac{1}{\sin^2 t}=\dfrac{\sin^2 t-1}{\sin^2 t}=-\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}=-ctg^2 t$

г) $\dfrac{1-\cos^2 t}{1-\sin^2 t}=\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=tg^2 t$.

614.

а) $cos t\cdot tg\ t=cos t\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}=sin\ t,\ t\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in$ Z.

б) $\sin t+\cos t\cdot tg\ t=\sin t+\sin t=2\sin t$, $t\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in$ Z.

в) $\sin t\cdot ctg\ t=\sin t\cdot\dfrac{\cos t}{\sin t}=\cos t$, $t\neq\pi k$, $k\in$ Z.

г) $2\sin t\cdot ctg\ t+\cos t=3\cos t$, $t\neq\pi k$, $k\in$ Z.

615.

а) $\sin t\cdot\cos t\cdot\mathrm{ctg}\ t-1=\sin t\cdot\dfrac{\cos^2 t}{\sin t}-1=\cos^2 t-1=-\sin^2 t$,

$t\neq\pi k$, $k\in$ Z.

б) $\sin^2 t+\cos^2 t+\mathrm{tg}^2 t=1+\mathrm{tg}^2 t=1+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\dfrac{1}{\cos^2 t}$.

в) $\sin^2 t-tg\ t\cdot ctg\ t=\sin^2 t-1=-\cos^2 t$, $t\neq\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in$ Z.

г) $tg\ t\cdot ctg\ t+ctg^2 t=1+ctg^2 t=\dfrac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t}=\dfrac{1}{\sin^2 t}$,

$t\neq\pi k$, $k\in$ Z.

616.

а) $\sin t=\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$, то есть $cos\ t<0$,

$\cos t=-\sqrt{1-\sin^2 t}=-\dfrac{3}{5}$,

$tg\ t=\dfrac{\sin t}{\cos t}=-\dfrac{4}{3}$; $ctg\ t=\dfrac{\cos t}{\sin t}=-\dfrac{3}{4}$.

б) $\sin t=\dfrac{5}{13}$, $0<t<\dfrac{\pi}{2}$, то есть $cos\ t>0$,

$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\dfrac{12}{13}$,

$tg\ t=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\dfrac{5}{12}$; $ctg\ t=\dfrac{\cos t}{\sin t}=\dfrac{12}{5}$.

в) $sin\ t = -0{,}6$; $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, то есть $cos\ t > 0$,

$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = 0{,}8$,

$tg\ t = -\frac{3}{4}$; $ctg\ t = -\frac{4}{3}$.

г) $sin\ t = -0{,}28$; $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, то есть $cos\ t < 0$,

$\cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t} = -0{,}96$,

$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{7}{24}$; $ctg\ t = \frac{24}{7}$.

617.

а) $\cos t = 0{,}8$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то есть $sin\ t > 0$,

$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = 0{,}6$,

$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{4}$; $ctg\ t = \frac{4}{3}$.

б) $\cos t = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то есть $\sin t > 0$

$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{12}{13}$

$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{12}{5}$; $ctg\ t = -\frac{5}{12}$.

в) $cos\ t = 0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, то есть $sin\ t < 0$,

$\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -0{,}8$,

$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3}$; $ctg\ t = -\frac{3}{4}$. Ошибка в ответе задачника.

г) $\cos t = -\frac{24}{25}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, то есть $sin\ t < 0$

$\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\frac{7}{25}$,

$tg\ t = \frac{7}{24}$; $ctg\ t = \frac{24}{7}$.

618.

а) $tg\ t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то есть $cos\ t > 0$.

$\cos^2 t = \frac{1}{1+tg^2 t}$; $\cos t = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2 t}} = \frac{4}{5}$;

$sin\ t = tg\ t \cdot cos\ t = \frac{3}{5}$; $ctg\ t = \frac{4}{3}$.

б) $tg\ t = 2{,}4$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, то есть $cos\ t < 0$,

$\cos t = -\sqrt{\frac{1}{1+tg^2 t}} = -\frac{5}{13}$; $\sin t = tg\ t \cdot \cos t = -\frac{12}{13}$; $ctg\ t = \frac{5}{12}$.

в) $tg\ t = -\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то есть $cos\ t < 0$.

$\cos t = -\sqrt{\frac{1}{1+tg^2 t}} = -\frac{4}{5}$; $\sin t = tg\ t \cdot \cos t = \frac{3}{5}$; $ctg\ t = -\frac{4}{3}$.

г) $tg\ t = -\frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, то есть $cos\ t > 0$.

$\cos t = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2 t}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin t = tg\ t \cdot \cos t = -\frac{1}{\sqrt{10}}$; $ctg\ t = -3$.

619.

а) $ctg\ t = \frac{12}{5}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, то есть $sin\ t < 0$.

$\sin t = -\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2 t}} = -\frac{5}{13}$; $\cos t = ctg\ t \cdot \sin t = -\frac{12}{13}$; $tg\ t = \frac{5}{12}$.

б) $ctg\ t = \frac{7}{24}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то есть $sin\ t > 0$,

$\sin t = \sqrt{\frac{1}{1+ctg^2 t}} = \frac{24}{25}$; $\cos t = ctg\ t \cdot \sin t = \frac{7}{25}$; $tg\ t = \frac{24}{7}$.

в) $ctg\ t = -\frac{5}{12}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, то есть $sin\ t < 0$,

$\sin t = -\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2 t}} = -\frac{12}{13}$; $\cos t = ctg\ t \cdot \sin t = \frac{5}{13}$; $tg\ t = -\frac{12}{5}$.

г) $ctg\ t = -\frac{8}{15}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то есть $sin\ t > 0$,

$\sin t = \sqrt{\frac{1}{1+ctg^2 t}} = \frac{15}{17}$; $cos\ t = sin\ t \cdot ctg\ t = -\frac{8}{17}$; $tg\ t = -\frac{15}{8}$.

620.

а) $(sin\ t + cos\ t)^2 - 2sin\ t\ cos\ t =$
$= sin^2 t + cos^2 t + 2sin\ t\ cos\ t - 2sin\ t\ cos\ t = 1.$

б) $\dfrac{2-\sin^2 t-\cos^2 t}{3\sin^2 t+3\cos^2 t}=\dfrac{2-1}{3}=\dfrac{1}{3}$.

в) $sin^4 t + cos^4 t + 2sin^2 t\ cos^2 t = (sin^2 t + cos^2 t)^2 = 1.$

г) $\dfrac{\sin^4 t-\cos^4 t}{\sin^2 t-\cos^2 t}=\dfrac{(\sin^2 t-\cos^2 t)(\sin^2 t+\cos^2 t)}{\sin^2 t-\cos^2 t}=1$,

$t \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

621.

а) $(sin\ t + cos\ t)^2 + (sin\ t - cos\ t)^2 =$
$= sin^2\ t + cos^2\ t + 2sin\ t\ cos\ t + sin^2 t + cos^2 t - 2sin\ t\ cos\ t = 2.$

б) $(tg\ t + ctg\ t)^2 - (tg\ t - ctg\ t)^2 =$
$= tg^2 t + ctg^2 t + 2 - tg^2 t - ctg^2 t + 2 = 4.$

в) $sin\ t\ cos\ t \cdot (tg\ t + ctg\ t) = sin\ t\ cos\ t \left(\dfrac{\sin t}{\cos t}+\dfrac{\cos t}{\sin t}\right)=$

$= sin\ t\ cos\ t\dfrac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos t}=1$, $t \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

г) $sin^2 t\ cos^2 t\ (tg^2 t + ctg^2 t + 2) = sin^2 t\ cos^2 t\ (tg\ t\ + ctg\ t)^2 =$

$= sin^2 t\ cos^2 t \left(\dfrac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\sin t}\right)^2 = 1$, $t \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

622.

а) $\dfrac{\sin t}{1+\cos t}+\dfrac{\sin t}{1-\cos t}=\dfrac{\sin t(1-\cos t+1+\cos t)}{1-\cos^2 t}=\dfrac{2\sin t}{\sin^2 t}=\dfrac{2}{\sin t}$.

б) $(1 + tg\ t)^2 + (1 - tg\ t)^2 = 1 + tg^2\ t + 2\ tg\ t + 1 + tg^2\ t - 2tg\ t =$
$= 2(tg^2\ t + 1) = \dfrac{2}{\cos^2 t}$.

в) $\dfrac{\cos t}{1+\sin t}+\dfrac{\cos t}{1-\sin t}=\dfrac{\cos t(1-\sin t+1+\sin t)}{1-\sin^2 t}=\dfrac{2\cos t}{\cos^2}=\dfrac{2}{\cos t}$.

г) $(1 + ctg\ t)^2 + (1 - ctg\ t)^2 = 1 + ctg^2 t + 2ctg\ t + 1 + ctg^2 t - 2\ \mathrm{ctg}\ t =$
$= 2(ctg^2 t + 1) = \dfrac{2}{\sin^2 t}$.

623.

а) $\dfrac{1-\sin^2 t}{1-\cos^2 t}+tg\ t\cdot ctg\ t=\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+1=\dfrac{1}{\sin^2 t}$.

б) $ctg\,t+\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{\cos t}{\sin t}+\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{\sin^2 t+\cos t+\cos^2 t}{\sin t(1+\cos t)}=\frac{1}{\sin t}$.

в) $\frac{\cos^2 t-1}{\sin^2 t-1}+tg\,t\cdot ctg\,t=\frac{-\sin^2 t}{-\cos^2 t}+1=\frac{1}{\cos^2 t}$.

г) $tg\,t+\frac{\cos t}{1+\sin t}=\frac{\sin t}{\cos t}+\frac{\cos t}{1+\sin t}=\frac{\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t(1+\sin t)}=$

$=\frac{1+\sin t}{\cos t(1+\sin t)}=\frac{1}{\cos t}$.

624.

$\frac{\sin t}{1+\cos t}+\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{\sin t(1-\cos t+1+\cos t)}{1-\cos^2 t}=\frac{2\sin t}{\sin^2 t}=\frac{2}{\sin t}$.

а) -16.

б) $2\sqrt{3}$.

625.

а) $\frac{1-\cos^2 t}{\sin t}=\frac{\sin^2 t}{\sin t}=\sin t=\sin(t+4\pi)$.

б) $ctg\,t\cdot\sin t=\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin t=\cos t=\cos(t-2\pi)$.

в) $tg\,t\cdot\cos(t+6\pi)=\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos t=\sin t=\sin(t+2\pi)$.

г) $\sin^2(t+4\pi)+\cos^2(t+2\pi)-\sin^2(t-2\pi)-\cos^2(t-8\pi)=$

$=\sin^2 t+\cos^2 t-\sin^2 t-\cos^2 t=0$.

626.

а) $\frac{tg\,t}{tg\,t+ctg\,t}=\frac{tg\,t}{\frac{\sin t}{\cos t}+\frac{\cos t}{\sin t}}=\frac{tg\,t}{\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\sin t}}=$

$=\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos t\cdot\sin t=\sin^2 t$.

б) $\frac{1+tg\,t}{1+ctg\,t}=\frac{1+tgt}{\frac{tgt+1}{tgt}}=tg\,t$.

в) $\frac{ctg\,t}{tg\,t+ctg\,t}=\frac{ctg\,t}{\frac{\sin t}{\cos t}+\frac{\cos t}{\sin t}}=\frac{ctg\,t}{\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\cdot\sin t}}=\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\cos t\cdot\sin t=\cos^2 t$.

г) $\dfrac{1-ctg\,t}{1-tg\,t}=\dfrac{1-\dfrac{\cos t}{\sin t}}{1-\dfrac{\sin t}{\cos t}}=\dfrac{\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t}}{\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t}}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}=-ctg\,t$.

627.

$\sin(4\pi+t)=\dfrac{3}{5}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, то есть $\cos t > 0$,

$$tg(\pi-t)=tg(-t)=-tg\,t=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\frac{\sin(4\pi+t)}{\sqrt{1-\sin^2(4\pi+t)}}=-\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}.$$

628.

$\cos(2\pi-t)=\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2}<t<2\pi$, то есть $\sin t < 0$,

$$ctg(\pi-t)=ctg(-t)=-ctg\,t=-\frac{\cos t}{\sin t}=-\frac{\cos(-t)}{\sin t}=$$

$$=-\frac{\cos(2\pi-t)}{-\sqrt{1-\cos^2(2\pi-t)}}=-\frac{\frac{12}{13}}{-\sqrt{1-\frac{144}{169}}}=+\frac{12}{5}.$$

629.

$\cos t=-\dfrac{5}{13}$, $8{,}5 < t < 9\pi$, то есть $\sin t > 0$,

$$\sin(-t)=-\sin t=-\sqrt{1-\cos^2 t}=-\frac{12}{13}.$$

630.

$\sin t=\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{9\pi}{2}<t<5\pi$, то есть $\cos t < 0$.

$$\cos(-t)+\sin(-t)=\cos t-\sin t=-\sqrt{1-\sin^2 t}-\sin t=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{7}{5}.$$

§ 25. Тригонометрические функции углового аргумента

631.

а) $\dfrac{2\pi}{3}$. б) $\dfrac{11\pi}{9}$.

в) $\dfrac{5\pi}{3}$. г) $4\dfrac{1}{4}\pi$.

632.

а) $\frac{7\pi}{6}$. б) $\frac{5\pi}{6}$.

в) $\frac{11\pi}{6}$. г) $\frac{11\pi}{3}$.

633.

а) $\frac{128\pi}{45}$. б) $\frac{43\pi}{36}$.

в) $\frac{35\pi}{18}$. г) $\frac{171\pi}{36}$.

634.

а) 135°. б) 660°. в) 216°. г) 920°.

635.

а) 480°. б) 315°. в) 324°. г) 555°.

636.

а) 300°. б) 675°. в) 375°. г) 280°.

637.

а) $\sin\alpha = 1$; $\cos\alpha = 0$; $tg\,\alpha$ – не существует ; $ctg\,\alpha = 0$.

б) $\sin\alpha = 1$; $\cos\alpha = 0$; $tg\,\alpha$ – не существует ; $ctg\,\alpha = 0$.

в) $\sin\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$; $tg\,\alpha = 0$; $ctg\,\alpha$ – не существует.

г) $\sin\alpha = -1$; $\cos\alpha = 0$; $tg\,\alpha$ – не существует ; $ctg\,\alpha = 0$.

638.

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\,\alpha = -1$; $ctg\,\alpha = -1$.

б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\,\alpha = -1$; $ctg\,\alpha = -1$.

в) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\,\alpha = -1$; $ctg\,\alpha = -1$.

г) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\,\alpha = -1$; $ctg\,\alpha = -1$.

639.

а) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $ctg\,\alpha = -\sqrt{3}$.

б) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $ctg\,\alpha = \sqrt{3}$.

в) $sin\ \alpha\ =\ -\frac{1}{2}$; $cos\ \alpha\ =\ \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $ctg\ \alpha\ =\ -\sqrt{3}$.

г) $sin\ \alpha\ =\ -\frac{1}{2}$; $cos\ \alpha\ =\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $ctg\ \alpha\ =\ \sqrt{3}$.

640.

а) $sin\ \alpha\ =\ \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ \alpha\ =\ -\frac{1}{2}$; $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$; $ctg\ \alpha\ =\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) $sin\ \alpha\ =\ \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ \alpha\ =\ -\frac{1}{2}$; $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$; $ctg\ \alpha\ =\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

в) $sin\ \alpha\ =\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ \alpha\ =\ \frac{1}{2}$; $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$; $ctg\ \alpha\ =\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

г) $sin\ \alpha\ =\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ \alpha\ =\ \frac{1}{2}$; $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$; $ctg\ \alpha\ =\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

641.

а) $x\ = 5\ sin\ \alpha$. б) $x = 4\ cos\ \alpha$.

в) $x = \frac{3}{\cos\alpha}$. г) $x = \frac{1}{tg\alpha} = ctg\alpha$.

642.

а) $x = \frac{2}{\sin 30} = 4$. б) $x = 1 \cdot \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) $x = \frac{2}{\sin 60} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. г) $x = 5 \cdot \cos 60 = \frac{5}{2}$.

643.

а) Катеты: $a = c\sin\alpha = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, $b = c\cos\alpha = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

Площадь: $S = \frac{ab}{2} = 18\sqrt{3}$, $r = \frac{1}{2}c = 6$.

б) Катеты: $a = c\sin\alpha = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, $b = c\cos\alpha = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Площадь: $S = \frac{ab}{2} = 9$.

Радиус описанной окружности $r = \frac{1}{2}c = 3$.

в) Катеты: $a = c\sin\alpha = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$. $b = c\cos\alpha = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Площадь: $S = \frac{ab}{2} = 2\sqrt{3}$.

Радиус описаной окружности $r = \frac{1}{2}c = 2$

г) Катеты: $a = c\sin\alpha = 60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$. $b = c\cos\alpha = 60\cdot\frac{1}{2} = 30$.

Площадь: $S = \frac{ab}{2} = 450\sqrt{3}$.

Радиус описаной окружности $r = \frac{1}{2}c = 30$.

644.
sin 160, *sin* 40, *sin* 120, *sin* 80.

645.
cos 160, *cos* 120, *cos* 80, *cos* 40.

646.
sin 570, *sin* 210, *cos* 70, *sin* 110.

647.
ΔABC – прямоугольный (т.к. он вписан в окружность и одна его сторона является диаметром).
Тогда $AB = AC\ cos\alpha = 2R\ cos\ \alpha$.

648.
Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD разбивают этот четырехугольник на четыре треугольника: ΔABO, ΔBCO, ΔCDO и ΔDAO, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Пусть α — угол между диагоналями, т.е. $\angle COB = \angle AOD = \alpha$ (как вертикальные).

$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\alpha;$

$S_{\Delta BCO} = \frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin\alpha;$

$S_{\Delta CDO} = \frac{1}{2}CO\cdot OD\cdot\sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}CO\cdot OD\cdot\sin\alpha;$

$S_{\Delta DAO} = \frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot\sin\alpha;$

$S_{ABCD} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BCO} + S_{\Delta CDO} + S_{\Delta DAO} =$

$=\dfrac{1}{2}\sin\alpha(AO\cdot OB+BO\cdot OC+CO\cdot OD+AO\cdot OD)=$

$=\dfrac{1}{2}BD\cdot AC\cdot\sin\alpha$ (поскольку $BO+OD=BD$; $AO+OC=AC$).

Что и требовалось доказать.

649.

Из того, что сумма углов треугольника равна 180°, следует, что $\angle B=180°-\angle A-\angle C=180°-45°-30°=105°$.

По теореме синусов имеем:

$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$, откуда $BC=\dfrac{AB}{\sin C}\cdot\sin A=\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=8$ (см).

По теореме косинусов имеем:

$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$;

$64=32+\mathrm{AC}^2-8\sqrt{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

$AC^2-8AC-32=0$;

$D=64+128=192=\left(8\sqrt{3}\right)^2$;

$AC=\dfrac{8\pm8\sqrt{3}}{2}$, откуда $AC=4(1+\sqrt{3})$ (см).

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\angle C=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot4((1+\sqrt{3})\cdot\dfrac{1}{2}=8((1+\sqrt{3})$ (см^2).

Ответ: $AC=4(1+\sqrt{3})$ см; $S_{\Delta ABC}=8(1+\sqrt{3})$ см^2.

§ 26. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, их свойства и графики

650.

Боковая сторона данного треугольника, прилежащая к углу в 60°, равна $\dfrac{5}{\sin 60°}=\dfrac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ (см), а прилежащая к углу в 45° равна $\dfrac{5}{\sin 45°}=\dfrac{5}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=5\sqrt{2}$ (см). Угол при вершине треугольника, из которой опущена высота, равен 180° – 45 ° – 60° = 75°.

Следовательно, площадь треугольника равна:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ=\frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=\frac{25\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}{6}\ (\text{см}^2).$$

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}{6}$ см^2.

651.

а) 0; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

652.

а) $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$, $x=\frac{4\pi}{3}$, $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. $\qquad y=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$

б) $y=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

653.

Точка принадлежит графику тогда и только тогда, когда ее координаты $(x\ ,y)$ удовлетворяют уравнению $y = sin\ x$.

а) $-1 = sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ – верно.

Принадлежит.

б) $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{2}$ – неверно.

Не принадлежит.

в) $1 = sin\ \pi$ – неверно.

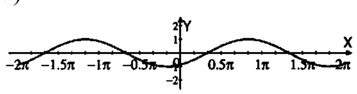
Не принадлежит.

г) $-1 = sin\ \frac{3\pi}{2}$ – верно.

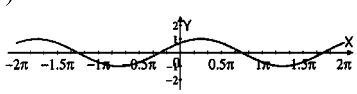
Принадлежит.

654.

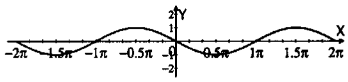
а)



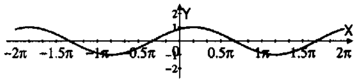
б)



в)

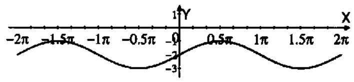


г)

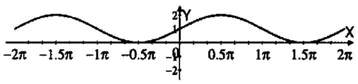


655.

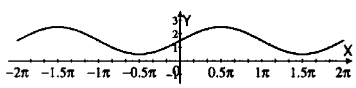
а)



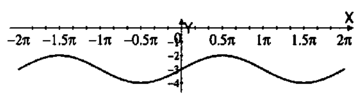
б)



в)

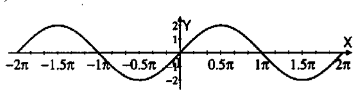


г)

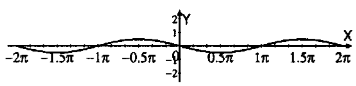


656.

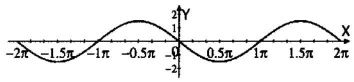
а)



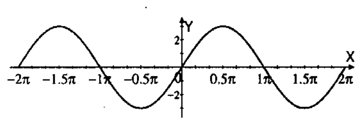
б)



в)

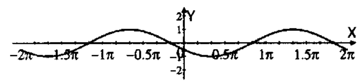


г)

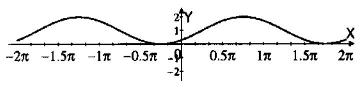


657.

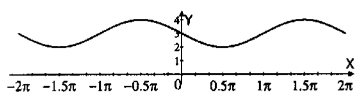
а)



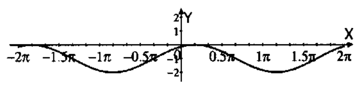
б)



в)



г)



658.

а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$; б) $f\left(\frac{-3\pi}{2}\right)=0$; в) $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

659.

Точка (x, y) принадлежит графику тогда, кода $y = cos\ x$.

а) $-1 = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ – неверно. Не принадлежит.

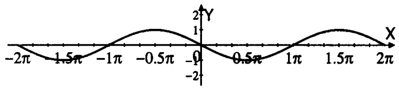
б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}$ – верно. Принадлежит.

в) $-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$ – верно. Принадлежит.

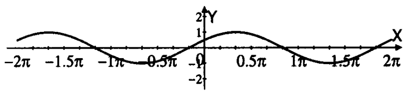
г) $1 = \sin 2\pi$ – верно. Принадлежит.

660.

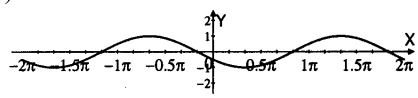
а)



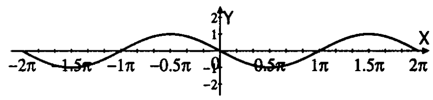
б)



в)

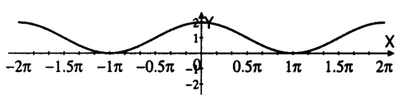


г)

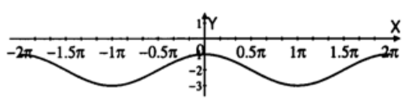


661.

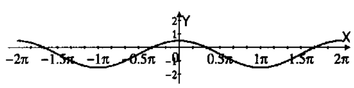
а)



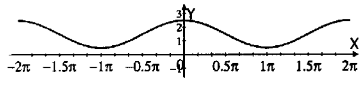
б)



в)

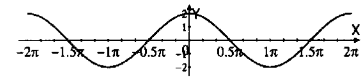


г)

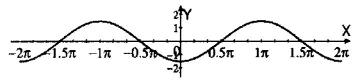


662.

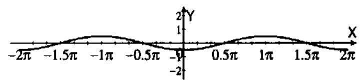
а)



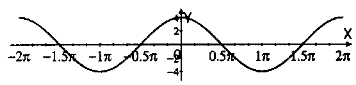
б)



в)

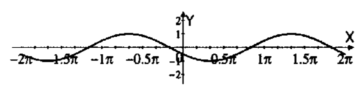


г)

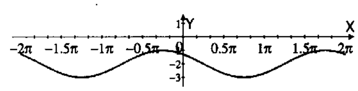


663.

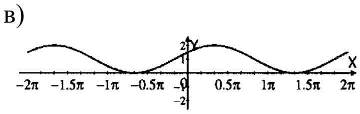
а)



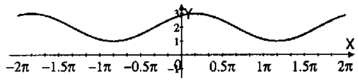
б)



в)

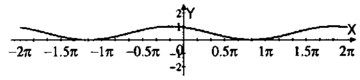


г)

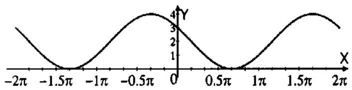


664.

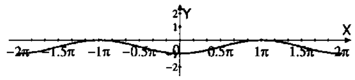
а)



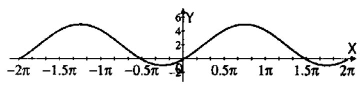
б)



в)

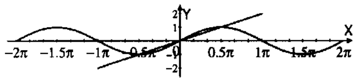


г)



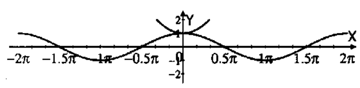
665.

а) $\sin x = \frac{2}{\pi} x$,



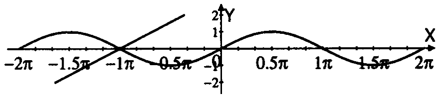
Решения: 0; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$.

б) $\cos x = x^2 + 1$.



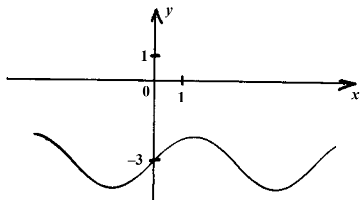
Решение: 0.

в) $\sin x = x + \pi$.



Решение: $x = -\pi$.

г) $\sin x = 3 - \dfrac{4}{\pi}x$.



Решение: $x = \dfrac{\pi}{2}$.

666.

а) $f(x) = x^5 \sin x$

Рассмотрим: $f(-x) = (-x)^5 sin(-x) = x^5 sin\ x = f(x)$.

Причем, $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Функция четная.

б) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2 - \cos x}$

Функция не определена в тех точках, где $x^2 = cos\ x$. Очевидно, что корни этого уравнения симметричны относительно O. (т.к. если x – корень, то $(-x)$ – тоже корень). Значит область определения симметрична относительно O.

$$f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2 - \cos(-x)} = \frac{\sin^2(x)}{x^2 - \cos x} = f(x)$$

Функция четная.

в) $f(x) = \dfrac{\cos 5x + 1}{|x|}$,

$D(f) = (-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$ – симметрична относительно O.

$$f(-x) = \frac{\cos(-5x) + 1}{|-x|} = \frac{\cos 5x + 1}{|x|} = f(x),$$

Функция четная.

г) $f(x) = sin^2 x - x^4 + 3\ cos\ 2x$.

$D(f) = (-\infty; +\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x) = sin^2(-x) - (-x)^4 + 3cos\ (-2x) = sin^2 x - x^4 + 3cos\ 2x = 0$.

667.

а) $f(x) = x - \sin x$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x) = -x + \sin(-x) = -(x + \sin x) = -f(x)$

Функция нечетна.

б) $f(x) = x^3 \cdot \sin x^2$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x) = (-x)^3 \cdot \sin(-x)^2 = -(x^3 \sin x) = -f(x)$.

Функция нечетна.

в) $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^2 - 9}$,

$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x) = \frac{(-x)^2 \sin(-x)}{(-x)^2 - 9} = -\frac{x^2 \sin x}{x^2 - 9} = -f(x)$.

Функция нечетна.

г) $f(x) = \frac{x^3 - \sin x}{2 + \cos x}$,

$D(f) = (-\infty; +\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x) = \frac{(-x)^3 - \sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{x^3 - \sin x}{2 + \cos(-x)} = -f(x)$.

Функция нечетна.

668.

$f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $-f(\cos x) = -2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x =$
$= 2\sin^2 x + 3\cos x$.

669.

$f(x) = 5x^2 + x + 4$, $f(\cos x) = 5\cos^2 x + \cos x + 4 = -5(1 - \cos^2 x) + \cos x + 9 =$
$= -5\sin^2 x + \cos x + 9$.

670.

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $f(2\sin x) = 2 \cdot 4\sin^2 x - 10\sin x + 1 = 8\sin^2 x - 10\sin x + 1 =$
$= 8(\sin^2 x - 1) - 10\sin x + 9 = -8\cos^2 x - 10\sin x + 9 = 9 - 10\sin x - 8(1 + tg^2 x)$.

Домашняя контрольная работа.

ВАРИАНТ № 1.

1.

а) $\frac{9}{5}$; б) $\frac{6}{5}$.

2.

а) Третьей; б) Третьей.

3.

$\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$

4.

$\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}ctg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$.

5.

$\sin\frac{12}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$; Знак "+".

6.

$$\frac{(\sin t + \cos t)^2}{1 + 2\sin t\cos t} = \frac{(\sin t + \cos t)^2}{\cos^2 t + 2\sin t\cos t + \sin^2 t} =$$

$$= \frac{(\sin t + \cos t)^2}{(\sin t + \cos t)^2} = 1,\ t \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

7.

$$(\sin t + \cos t)^2 + (\sin t - \cos t)^2 = \sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t +$$

$$+ \sin^2 t - 2\sin t\cos t + \cos^2 t = 2.$$

8.

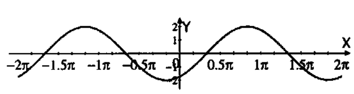
$\sin t = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то есть $\cos t < 0$,

$\cos t = -\sqrt{1 - \sin^2 t} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{-5}{13}$,

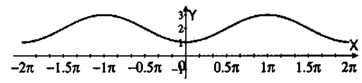
$tg\ t = \frac{-12}{5}$; $ctg\ t = \frac{-5}{12}$.

9.

а)



б)



10.

$f(x) = x^2 - 5x + 4$

$f(\cos x) = \cos^2 x - 5\cos x + 4 = \cos^2 x - 1 - 5\cos x + 5 =$

$= 5 - 5\cos x - \sin^2 x$.

ВАРИАНТ №2.

1.

а) $\frac{7\pi}{8}$; б) $\frac{\pi}{8}$.

2.

а) Четвертой. б) Третьей.

3.

$\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$

4.

$\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4}\cdot tg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$.

5.

$\cos\frac{15}{8}$, $\sin\frac{11\pi}{15}$; $\cos\frac{15}{8} < 0$, $\sin\frac{11\pi}{15} > 0$. Знак "–".

6.

$\frac{(\sin t - \cos t)^2}{1 - 2\sin t\cos t} = \frac{(\sin t - \cos t)^2}{(\sin t - \cos t)^2} = 1$, $t \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

7.

Доказать: $(sin\,t + cos\,t)^2 - (sin\,t - cos\,t)^2 = 4\,sin\,t\,cos\,t$,

Доказательство:

$(\sin t + \cos t)^2 - (\sin t - \cos t)^2 = 1 + 2\sin t\cos t - 1 + 2\sin t\cos t = 4\sin t\cos t$.

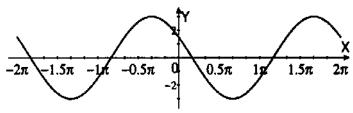
8.

$\cos t = -\frac{5}{13}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, то есть $sin\ t < 0$,

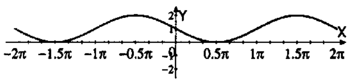
$$\sin t = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13},\ tg\ t = \frac{12}{5},\ ctg\ t = \frac{5}{12}.$$

9.

а)



б)



10. $f(x) = -x^2 + 4x + 3$,

$f(\sin x) = -\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 1 - \sin^2 x + 2 + 4\sin x =$

$= \cos^2 x + 2 + 4\sin x$.